А: КИСЕЛЕВЪ.

систематическій КУРСЬ АРИӨМЕТИКИ.

Допущенъ Уч. Ком. М. Н. Пр. въ качествѣ руководства для среднихъ учебныхъ заведеній, мужскихъ и женскихъ («Журн. М. Н. Пр.» 1915, май), рекомендованъ Уч. Ком. при Св. Синодѣ для употребленія въ духовныхъ училищахъ въ качествѣ руководства («Церк. Вѣд.» 1892, № 37); едобренъ Учебн. Ком., состоящимъ при собственной Его Императорскаго Величества Канцеляріи по учрежденіямъ Императрицы Маріи, въ качествѣ руководства для всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній этого вѣдомства (извѣщеніе отъ 11 января 1901 г., № 822); одобренъ Деп. Торг. и Ман., какъ пособіе для коммерческихъ училищъ (извѣщеніе отъ 30 мая 1898 г., № 14228); допущенъ къ употребленію въ старшихъ классахъ городск, и уѣзди. училищъ; внлюченъ въ каталогъ книгъ для учительск. библіотекъ. Для кадетскихъ корпусовъ рекомендованъ, какъ руководство.

Изданіе двадцать восьмое.

Цѣна 90 коп.

ИЗЛАНІЕ

Т-ва "В. В. ДУМНОВЪ, наслъдн. бр. САЛАЕВЫХЪ", москва, петроградъ, большая конюшенная, № 1.

изъ предисловій

къ разнымъ изданіямъ.

Къ четвертому изданію. Хотя успёхъ первыхъ трехь изданій «Систематическаго курса арнометики» даетъ объективное основаніе думать, что этотъ учебникъ достаточно приснособленъ къ нотребностямъ нашихъ среднихъ учебныхъ ваведеній, тёмъ не менёе, приступая къ 4-му изданію, мы сочли нужнымъ подвергнуть тщательному пересмотру содержаніе прежнихъ изданій, съ цёлью, во-первыхъ, болёе согласовать его съ послёдними программами и учебными планами, а во-вторыхъ, достигнуть возможно большей простоты въ изложеніи.

Главивний особенности 4-го изданія заключаются въ следующемь:

- 1. Согласно замъчаніямъ Учен. Ком. Мин. Нар. Пр., сдъланы измъненія въ опредъленіи первыхъ четырехъ дъйствій, при чемъ въ основу опредъленій поставлено понятіе о суммъ.
- 2. Во всемъ курсъ строго проведено различіе между величиною и ея значеніями.
 - 3. Въ курсъ дробей проведена большая систематичность.
- 4. Дано болье научное опредъление пройорцюйльности величинь и указаны признами прямой и обратной пропорціональности для руководства въ частныхъ случаяхъ.
- 5. Согласно нослъднимъ программамъ, помъщены въ самомъ текстъ нумераціи славянская и римская, а также—въ сокращенномъ изложеніи—метрическая система мъръ.
- 6. Добавлена статья о приближенных вы численіяхь, проходимая вы 6-мь илассь реальных училищь.

Къ десятому изданію. Въ этомъ изданіи существенно дополнена статья подъ названіемъ «Задачи на вычис леніе времени». Во-первыхъ, для такихъ задачъ указанъ другой пріемъ рѣщенія, чаще всего практикуемый въ дѣйствительности; во-вторыхъ, уяснено (мелкимъ шрифтомъ) различіе между календарнымъ счетомъ, по которому промежутокъ времени выражается въ невполнъ постоянныхъ единицахъ, каковы мѣсяцы и годы, и точнымъ счетомъ, по которому промежутокъ времени измъряется постоянными единицами: недѣлями, сутками и подраздъленіями сутокъ.

Нъ четырнадцатому изданію. Арнеметическое отношеніе и ариеметическая пропорція, какъ не представляющія теоретическаго интереса и не имѣющія практическихъ примѣненій, выпущены совсѣмъ съ цѣлью уменьшить количество учебнаго матеріала.

Кратному отношенію дано болье научное опредъленіе, сближающее его съ тьмъ, которое разсматривается въ геометріи.

При объяснени ръшения задачь на простое и сложное тройное правило на первое мъсто выдвинуть способъ приведения къ единицъ, вслъдствие чего является возможность сократить изложение главы пропорции.

Изложеніе сложнаго тройного правила значительно упрощено и сокрашено.

Къ двадцать пятому изданію. Главнъйшія измъненія и дополненія, введенныя въ это изданіе, состоять въ слъдующемъ:

Въ § 24, а изложено замъчание о томъ, въ какомъ смыслъ надо понимать сложение нуля съ другими числами.

Въ § 25 правило сложенія цѣлыхъ́ чиселъ изложено болѣе просто и ясно. \

, Въ § 47 перемъстительное свойство произведенія разъяснено болье наглядно. Въ § 134 доказательство второй изъ 2-хъ истинъ, на которыхъ основанъ способъ послъдовательнаго дъленія (для нахожденія общаго наибольшаго дълителя двухъ чисель), перенесено теперь, какъ трудно усвояемое учениками младшихъ классовъ, изъ обыкновеннаго шрифта въ мелкій.

§§ 149, 150, 151 и 152 («Измъненіе величины дроби съ измъненіемъея членовъ») изложены болье систематично и ясно.

Въ §§ 193 и 194 нъсколько улучшено изложение дълепія десятичной дроби на цълое число.

Сверхъ этихъ измёненій укажемъ еще н'якоторыя, вве денныя въ мелкій шрифтъ (для учащихся старшихь классовъ), съ цёлью достиженія большей системагичности, полноты и научности.

Добавлень § 21,а, въ которомъ разъясняется, что указанное въ текстъ главное свойство суммы распадается въ сущности на два отдъльныя свойства, называемыя «перемъстительнымъ» и «сочетательнымъ».

Въ § 38 добавлено замѣчаніе, что изиѣненіе суммы, указанное въ этомъ параграфѣ, представляетъ собою слѣдствіе свойствъ сочетательнаго и перемѣстительнаго.

Добавленъ § 61,а о сочетательномъ и распредълительномъ свойствахъ произведенія.

Къ § 110 добавлено доказательство двухъ истинь, на которыхъ основано нахождение признаковъ дълимости.

Въ § 120,a добавлено слѣдствіе: «произведеніе нѣсколькихь сомножителей: a_1a_2 a_3 a_n дѣлится на простое число p только тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одинь изь этихь сомножителей дѣлится на p. Эта истина имѣеть примѣненіе въ дальнѣйшемъ изложеніи дѣлимости.

Добавленъ § 208,а—«Безконечныя десятичныя дроби неперіодическія»—и обобщень на такія дроби признакь неравенства, указанный раньше для дробей конечныхь.

Взачёнъ прежняго § 241,а («Общія формулы процентовъ») теперь данъ болёе полный § 247, въ которомъ, между прочимъ, разъясненъ пріемъ вычисленія процентовъ, практикуемый очень часто въ банковыхъ операціяхъ.

Нъ двадцать восьмому изданію. Въ этомъ изданія, основыванов на цпркуляръ Министерства Народнато Просвыщенія отъ 6-го августа 1914 г. (№ 38341) 1), которымъ рекомейдуется йзученіе періоднисскихъ дробей перенести въ курсъ алгебры п производить при прохожденій геометрической прогрессій, мы значительно сократили тъ нараграфы, которые были носвящены итима дробимь и большийство ихъ неренесли въ мелкій прифть.

^{*)} Помъщенномъ, въ октябрьской книжить журнала Мин. Нар. ... Пр. за 1914 годъ.

ОТДЪЛЪ ПЕРВЫЙ.

Отвлеченныя цѣлыя числа.

І. Счисленіе.

1. Понятіе о числъ. Одинъ предметь да одинъ предметь составляють два предмета; два предмета да одинъ предметь составляють три предмета; три да одинъ составляють четыре; и т. д.

Одинъ, два, три, четыре... и т. д. называются числами. Число одинъ называется иначе единица.

Всякое число, кромѣ единицы, представляетъ собою собраніе единицъ.

Число наз. предметнымъ (или конкретнымъ), если оно сопровождается названіемъ тёхъ предметовъ, изъ которыхъ составлено; напр., пять карандашей.

Число наз. отвлеченнымъ, если неизвъстно, собрание какихъ предметовъ оно представляетъ; напр., пять.

2. Естественный рядъ чиселъ. Если къ единицѣ присоединимъ еще единицу, къ полученному числу снова присоединимъ единицу, къ этому числу опять присоединимъ единицу и т. д., то получимъ естественный (или натуральный) рядъ чиселъ:

одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь и т. д.

Наименьшее число въ этомъ ряду — единица; наибольшаго числа иътъ, потому, что ко всякому числу, какъ бы велико оно ни было, можно прибавить сще единицу; значить естественный рядь чисель можеть быть продолжаемь безькон па.

З. Счетъ. Чтобы имъть исное понятіе о собраніи предметовъ, мы должны сосчитать ихъ. Счетъ состоитъ въ томъ, что, отдъляй одинъ предметь за другимъ (на самомъ дълъ или только мысленно), мы называемъ каждый разъ число, составившееся изъ отдъленныхъ предметовъ. Такъ, считая столы въ классъ, мы отдъляемъ мысленно одинъ столь за другимъ и говоримъ: одинъ, два, три, четыре и т. д.

Чтобы умъть считать до какого угодно большого числа, надо научиться называть всякое число.

Способъ составлять названія для всякихъ чисель называется словеснымъ счисленіемъ или словесною нумерацією.

Способъ выражать всякое число особыми письменными внаками называется письменнымъ счисленісмъ или письменною нумерацією.

Ознакомимся сначала со счисленіемъ чиселъ до тысячи а затёмъ и со счисленіемъ другихъ чиселъ.

4. Словесное счисленіе до тысячи. Первыя десять чисель носять сл'єдующія названія:

одинъ, два, три, четыре, иять, шесть, семь, восемь, девять, десять (или десятокъ).

Съ помощью этихъ названии и еще некоторыхъ другихъ можно выражать и другія числа. Положимъ, напр., мы желаемъ назвать число поставленныхъ здёсь черточекъ:



Для этого отсчитываемъ десять черточекъ и отдъляемъ ихъ отъ остальныхъ; потомъ отсчитываемъ еще десять черточекъ и отдъляемъ ихъ отъ остальныхъ. Продолжаемъ такъ отсчитывать по десятку до тъхъ поръ, пока либо совсъмъ не останется черточекъ, либо ихъ останется менъе

десяти. Теперь сосчитаемь десятии и оставшіяся черточки (или единицы); такъ какъ десятковъ оказалось четыре, а оставшихся черточекъ три, то мы можемъ число всёхъ черточекъ назвать такъ:

четыре десятка, три единицы.

Когда въ числъ окажется болье десяти десятковъ, то поступають такъ же, какъ если бы эти десятки были отдъльныя единицы, т.-е. отсчитывають десять десятковъ, потомъ еще десять десятковъ, затъмъ снова десять десятковъ и т. д. до тъхъ поръ, пока можно. Каждые десять десятковъ называють однимъ словомъ: сто или сотня. Положимъ, что въ какомъ-нибудь числъ оказывается: сотенъ—три, десятковъ—пять и оставшихся единицъ—семь; такое число можно назвать такъ:

три сотни, иять десятковъ, семь единицъ.

Если сотенъ въ числъ окажется болъе десяти, то считають ихъ тоже десятками. Каждыя десять сотенъ называють однимъ словомъ Тысяча.

- 5. Сокращеніе нѣкоторыхъ названій. Въ нашемъ языкъ употребительны нѣкоторыя сокращенныя названія чиселъ. Такъ, десять да одннъ назыв. одинадцать (т.-е. одинъ-на-десять); десять да два наз. двънадцать (т.-е. двъ-на-десять) и т. д. Два десятка наз. двадцать (т.-е. два-десять); три десятка наз. тридцать (т.-е. тридесять) и т. д. (четыре десятка наз. сорокъ). Двъ сотни наз. двъсти; три сотни наз. триста и т. д.
- 6. Письменное счисленіе до тысячи. Первыя девять чиселть обозначаются особенными письменными знаками или цыфрами:

Съ помощью этихъ девяти цыфръ и десятой о (нуль), означающей отсутствіе числа, можно изобразить всякое число.

Для этого условились писать: простыя единицы — на первомъ мъстъ справа, десятки—на второмъ мъстъ справа, сотни—на третьемъ мъстъ; напр.:

триста	copo	къ	1	[R]	ъ	H3	юб	рa	BE	TC	я.	•	•	345;
триста	copo	ľЪ					٠.			٠,		•		340.
триста														300.

Съ лъвой стороны цыфернаго изображенія числа пе принято писать нулей; такъ, вмъсто 024 пишутъ короче: 24, потому что порядокъ мъстъ всегда считаютъ справа и потому и въ первомъ, и во второмъ изображеніи цыфра 2 стоитъ на второмъ мъстъ, а цыфра 4 — на первомъ, и, слъдовательно, въ обоихъ изображеніяхъ 2 означаетъ десятки, а 4 — единицы.

Рев цыфры, кромъ нуля, называются значащими цыфрами.

Число, изображаемое одною пыфрой, называется однозначнымъ, двумя цыфрами — двузначнымъ, многими цыфрами—многозначнымъ.

7. Словесное счисленіе чиселъ, превосходящихъ тысячу. Когда считаемыхъ предметовъ болье тысячи, то составляють изъ нихъ столько тысячь, сколько можно; затъмъ считаютъ тысячи и оставшіяся единицы и называютъ число тъхъ и другихъ; напр.: двъсти сорокъ тысячъ пятьсотъ шестьдесятъ двъ единицы.

Тысяча тысячь составляеть милліонъ.

Тысяча милліоновъ-билліонъ (или милліардъ).

Тысяча билліоновъ-трипліонъ: п т. п.

Такимъ образомъ можетъ получиться, напр., слъдующее название числа:

сто восемьдесять милиіоновъ триста сорокъ девять тысячъ изтьсоть шестнадцать единицъ.

8. Составныя и главныя единицы. Десятки, сотни, тысячь, мидліоны.

называются составными сдипицами. Изъ нихъ тысячи, милліоны, билліоны, трилліоны и т. д. называются главными единицами; къ нимъ причисляютъ также и простыя единицы. Всъ остальныя составныя единицы представляють собою либо десятки, либо сотии этихъ главныхъ единицъ.

9. Письменное счисленіе чисель, превосходящих тысячу. Пусть требуется написать число: тридцать пять б й й л і о н о в ъ восемьсоть шесть м и лл і о н о в ъ семь т ы с я ч ъ шестьдесять три е д и н и ц ы. Его можно было бы написать при помощи пыйръ и словъ

Его можно было бы написать при помощи цыфръ и словъ такъ:

35 билліоновъ 806 милліоновъ 7 тысячъ 63 единицы, или, короче, такъ:

35'806'7'63,

если условимся, что первая справа запятая заміняєть собою слово «тысячь», вторая—слово «минліоновь», третья—слово «билліоновь», четвертая—слово «трпиліоновь» и т. д. Подобно этому:

15,36,801 означало бы: 15 милл. 36 тысячь 801 ед. 3'3'205'1 > 3 билл. 3 милл. 205 тысячь 1 ед.

Но такой способъ писанія имѣеть много пеудобствъ. Напр., если бы въ выраженіи: 4'57'8 запятыя стердись (или ихъ забыли написать), а остались бы только однѣ цыфры: 4578, то нельзя было бы прочесть число, такъ какъ неизвѣстно, какія цыфры означають милліоны, какія—тысячи и какія—единицы. Для избѣжанія этого и другихъ неудобствъ числа пишутъ такъ, чтобы между двумя сосѣдними запятыми всегда стояли три цыфры. Напр., вмѣсто такого изображенія: 4'57'8' пишутъ:

4'057'008

При этомъ ваиятыя становятся безполезными, потому что и безъ нихъ мы будемъ знать, что первыя справа три ныфры означаютъ число единицъ, слъдующія влъво

цыфры означають число тысячь, следующія за атими влъсо три цыфры-число милліоновъ, и т. д. Напр.:

567 002 301 означасть 567 милл. 2 тыс. 301 ед.

- э 2 билл. 8 милл. 1 тыс. 20 ед. -2 008 001 020
- · 15 000 026 » 15 милл. 26 ед. и т. и.
- 10. Какъ прочесть число, написанное плиннымъ рядомъ цыфръ. Чтобы легче прочесть число, изображенное длиннымъ рядомъ цыфръ, напр., такое: 5183000567000, отдёляють въ немъ справа (напр., запятою, поставленною сверху) по три цыфры до тъхъ поръ, пока можно:

5'183'000'567'000.

Первая справа запятая заменяеть слово «тысячь», вторая — «милліоновь», третья — «билліоновь», четвертая— «трилліоновъ». Значить, наше число должно быть прочтено тань: 5 трилл. 183 билл. 567 тысячь.

Д дя удобнаго прочтенія иногда пишуть (п печатають) большін числа такимъ образомъ, чтобы каждын три цыфры. считая справа, отделялись небольшими промежутками; напр.: 5 183 000 567 000. Тогда число удобно прочесть, и не ставя запятыя.

11 Значеніе мъстъ, занимаемыхъ пыфрами. При такомъ способъ писанія чисель каждое місто, ванимаемое цыфрой, имбеть свое особое значеніе. а именно:

на	T-W.P	MEGLE	справа	ставится	простыя единицы	
ď	2-мъ	>	>	>	десятки	
>	3-мъ	>	>	>	COTHE	
>	4-мъ	*	>	>	единицы тысячъ	
*	5-мъ	>	>	>	десятки тысячь	
>	6-мъ	×	>	>	сотни тысячь	
Z.	7-мъ	>	>	>>	ед. милліоновъ	
>	8-мъ	Þ	, >>	»	дес. милліоновъ .	

- > сотни милліоновъ ; ед. билліоновъ и т. д.

- 12. Двояков значеніе цыфръ. Мы видимъ такимъ образомъ, что наше нисьменное счисленіе основано на употребленіи 10 цыфръ, которымъ приписывается двоякое значеніе: одно—въ зависимости отъ начертанія цыфры, другое въ вависимости отъ мъста, занимаемаго цыфрой; а именно: изъ двухъ написанныхъ рядомъ цыфръ пъвая означаетъ единицы, въ 10 разъ большія, чъмъ правая.
- 13. Разряды единицъ. Различныя единицы, которыми пользуются при исчисленіи, раздѣляють на разряды:

простыя единицы называются единицами 1-го разряда, десятки—единицами 2-го разряда,

сотни-единицами 3-го разряда, и т. д.

Всякай составная единица, по сравненію съ другою единицею, меньшею ея, называется единицею высшаго разряда, а по сравненію съ единицею, большею ея, называется единицею низшаго разряда; такъ, сотня есть единица высшаго разряда сравнительно съ десяткомъ и единица низшаго разряда сравнительно съ тысячею

Всякая составная единица содержить въ себъ 10 единиць слъдующаго низшаго разряда; напр., сотня тысячъ содержить въ себъ 10 десятковъ тысячъ; десятокъ тысячъ—10 тысячъ и т. д.

Замѣчаніе. Разряды единиць группирують еще въ классы; къ 1-му классу относять первые три разряда: сотни, десятки и единицы; ко 2-му классу относять слѣдующіе три разряда: тысячи, десятки тысячь и сотни тысячь и т. д. 1-й классь есть классь единиць (содержить сотни, десятки и единицы единиць); 2-й классь—классь тысячь (содержить сотни, десятки и единицы тысячь) й т. д.

14. Какъ узнать, сколько въ числъ всъхъ единицъ даннаго разряда. Пусть требуется узнать, сколько въ числъ ,56284 вакиючается в с ъ хъ

содень, т.-е. сколько сотень заключается вы десяткахы тысячь, вы тысячахы и вы сотняхы даннаго числа вмёсты.

Простыя сотни ставятся на третьемь мёстё справа; на данномъ числё на третьемь мёстё стоить цыфра 2; значить, въ числё есть 2 простыя сотни. Слёдующая влёво цыфра 6 означаеть тыслчи; но въ каждой тыслчё содержится 10 сотень; значить, въ 6 тысячахъ ихъ заключается 60. Слёдующая влёво цыфра 5 означаеть десятки тысячь; но каждый десятокъ тысячъ содержить въ себё 10 тысячъ и, слёд., 100 сотенъ; значить, въ 5 десяткахъ тысячъ саключается 500 сотенъ. Всего, такимъ образомъ, въ данномъ числё содержится сотенъ 500 да еще 60 да еще 2, т.-с. 562.

Такъ же узнаемъ, что въ данномъ числъ всъхъ десятковъ 5628.

Правило. Чтобъ узнать, сколько въ числъ заключается всъхъ единицъ даннаго разряда, надо отбросить всъ цыфры, означающія низшіе разряды, и прочесть число, выражаемое оставшимися цыфрами.

Различныя системы счисленія.

15*. Понятіє о системахъ счисленія. Наша система счисленія называется десятичной (или десятиричной), потому что по этой системѣ 10 ед. одного разряда составляють составную единицу слѣдующаго высшаго разряда. Число 10 называють поэтому основаніємъ десятичной системы счисленія. Всякое число N по этой системѣ представляется разложеннымъ на простыя единицы, десятки, сотни, тысячи и т. д., при чемъ число единицъ каждаго разряда меньше 10. Если положимъ, что въ числъ N содержится простыхъ единицъ а, десятковъ b, сотенъ с, тысячь d и т. д., то по десятичной системѣ это число представляеть собою сумму:

 $N=a+b.10+c.10^2+d.10^3+e.10^3+...$

- Можно вообразить себ'в другія системы, въ которыхъ за основаніе принято какое-нибудь иное число. Если, напр., за основаніе взять число 5, то получится пятиричная система счисленія, по которои 5 ед. одного разряда должны составить единицу сл'вдующаго высшаго разряда. Такимъ образомъ, по интиричной систем'в единица 2-го разряда должна быть интерка, ед. 3-го разряда—пять интерокъ, или 5², ед. 4-го разряда—пять разъ по пяти интерокъ или 5³ и т. д. По этой систем'в число N представлялось бы такъ:

$$N=a+b.5+c.5^2+d.5^3+e.5^4+...$$

гдѣ каждое изъ чиселъ: a, b, c, d, e... было бы меньше 5-ти. Для выговариванія чиселъ по этой системѣ достаточно было бы дать особыя названія первымъ пяти числамъ и нѣкоторымъ составнымъ единицамъ.

- 16*. Число цыфръ, потребное для изображенія чиселъ по данной системъ. Для письменнаго изображенія чисель по десятичной систем'в употребляются 10 различных внаковъ. Для другой системы счисленія потребовалось бы иное число цыфръ. Напр., для интиричной системы достаточно было бы следующихъ пяти цыфръ: 1, 2, 3, 4, 0. Дъйствительно, число 5 представляло бы по этой систем'в одну единицу 2-го разряда и, след., выразилось бы такъ: 10. Число 6 представляло бы одну ед. 2-го разряда (пятерку) и одну ед. 1-го разряда и, слъд., выравилось бы такъ: 11, и т. п. Для изображенія чисель по системь, у которой основание превосходить 10, было бы недостаточно нашихъ цыфръ. Напр., для двенадцатиричной системы пришлось бы придумать особые знаки для чисель десять и одиннадцать, потому что наши обозначенія этихъ чисель выражали бы тогда другія числа, именно: 10 означало бы одну единицу второго разряда, т.-е. дюжину, а 11 означало бы одну единицу 2-го разряда и одну единицу 1-го разряда, т.-е. тринадцать.
- 17*. Число, написанное по десятичной систем в счисленія, изобразить по другой систем в. Для прим'єра положимъ, что требуется число 1766 выразить по изтиричной систем в при помощи изти внаковъ: 0, 1, 2, 3, 4. Для втого узнаемъ сначала,

сколько въ 1766 заключается единиць 2-го разряда, т.-е. пятерокъ. Ихъ оказывается 353, при чемъ остается одна единица

1-го разряда. Теперь узнаемь, сколько въ 353 пятеркахъ заключается единиць 3-го разряда. Такъ какъ единица 3-го разряда содержить 5 ед. 2-го разряда, то надо 353 раздѣлить на 5. Раздѣливъ, узнаемъ, что въ 353 пятеркахъ заключается 70 ед. 3-го разряда и 3 ед. 2-го разряда. 70 ед. 3-го разряда превращаемъ въ единицы 4-го разряда; эти послѣднія въ единицы 5-го разряда и т. д. Такимъ образомъ находимъ, что 1766 содержитъ: 2 ед. 5-го разр., 4 ед. 4-го разряда, 3 ед. 2-го разр. и 1 ед. 1-го разр.; слѣд., 1766 изобразится ио иятиричной системъ такъ: 24031.

Пусть еще требуется изобразить 121380 по 12-ричной системѣ:

Обозначая 10 черезь a, 11 черезь b, найдемь, что данное число изобразится такъ: 5 a 2 b 0.

18°. Число, написанное по накой-нибудь систем в счисленія, изобразить по десятичной. Пусть, напр., требуется число 5623, написанное по 8-ричной систем в, перевести на десятичную систему. Это можно выполнить, вычисливъ сумму:

$$N=3+2.8+6.83+5.83=3+16+384+2560=2063.$$

Но проще поступить такъ:

+3

2963

• Раздробимъ 5 ед. 4-го разр. въ единицы 3-го разр. 5623 для чего умножимъ 5 на 8 (потому что единица 4-го $\times 8$ разряда содержить по восьмиричной системъ 8 ед. 40 3-го разр.); къ полученному числу приложимъ 6 ед., +6находящіяся въ данномъ числъ. Раздробимъ единицы 46 3-го разряда въ единицы 2-го разр.; къ полученному ×8 числу приложимъ 2 ед., находящіяся въ данномъ 368 числъ. Разпробимъ единицы 2-го разр. въ ед. 1-го +2разр.; къ полученному числу приложимъ 3 ед., на-370 ходящіяся въ данномъ числь. Получимъ 2963. ×8 Если число, написанное по систем'в не-десятичной, 2960

Если число, написанное по системѣ не-десятичной, требуется изобразить по другой системѣ, тоже не-десятичной, то предварительно переводять первое число на десятичную систему, а затѣмъ уже это число на новую систему.

19*. Замѣчанія. 1) Система десятичнаго счисленія распространена почти повсемъстно (даже среди большинства дикихъ народовъ). Многіе видять причину такой распространенности въ томъ, что каждый человъкъ съ дътства привыкаеть считать при помощи 10 пальцевь объихь рукъ. Однако, десятичное счисление не принадлежить къ самымъ удобнымъ. Напр., удобнье была бы 12-ричная система, которая, не требуя для изображенія чисель большого числа цыфрь, обладаеть важнымь свойствомъ, что основание ен дълится безъ остатка на 2, на 3, на 4 н на 6. тогла какъ основаніе нашей системы дёлится только на 2 и на 5. Въ теоретическомъ отношении представляетъ нъкоторыя удобства система двуричная, которая, впрочемь, для практическихъ цёлей совсёмъ неудобна, такъ какъ по этой систем'в даже небольшое число выражается длиннымъ рядомъ цыфръ (напр., число 70 выражается такъ: 1000110). Но каковы бы не были недостатки десятичной системы, она настолько укоренилась своею. давностью и повсемъстнымъ распространениемъ, что было бы безполезно поднимать вопрось о замене ея другою системою. Къ тому же новая система счисленія потребовала бы переработки всьхъ книгь и таблицъ, составленныхъ по десятичной системъ, что представляло бы почти невыполнимый трудъ.

- 2) Употребляемыя нами цыфры и самая система письменнаго счисленія заимствованы европейцами у арабовь (около XII стольтія). Воть почему эти цыфры называють арабсними. Но есть основаніе думать, что арабы, въ свою очередь, заимствовали эту систему оть индійцевь.
- 3) Десятичныя дроби также могуть быть изображены посистем систем съ основанием отличным отъ 10. Напр., дробь 0,324, написанная по 5-причной систем совначаеть сумму: $\frac{3}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3}$.

II. Сложеніе.

Задача. Въ коробочку положили 5 спичекъ, потомъ 7 спичекъ, затъмъ еще 2 спички. Сколько всъхъ спичекъ оказалось въ коробочкъ?

Въ коробочкъ оказалось 14 спичекъ; это—число, которое получается отъ соединенія трехъ чиселъ: 5, 7 и 2 въ одно собраніє.

20. Что такое сложеніе. Нісколько чисель могуть быть соединены въ одно число, которое называется ихъ суммой. Такъ, 5 спичекъ да 7 спичекъ да 2 спички могуть быть соединены въ одно число: 14 спичекъ. Число 14 есть сумма трехъ чисель: 5, 7 и 2.

Нахождение по нъсколькимъ даннымъ числамъ одного новаго числа называется ариеметическимъ дъйствиемъ.

Ариеметическое дъйствіе, посредствомъ нотораго находится сумна нъсколькихъ чиселъ. наз. сложеніемъ.

Данныя для сложенія числа наз слагаеными.

Замъчаніе. Выраженія; «къ 7 прибавить 3», «къ 7 приложить 3» и т. п. означають то же самое, что: «найти сумму 7-ми и 3-хъ».

- 21. Главное свойство суммы. Сумма не зависить оть того порядка, въ какомъ мы соединяемъ единицы слагаемыхъ. Такъ, если требуется найти сумму 5, 7 и 2, то мы можемъ къ 5 присоединить 7, потомъ 2; или къ 5 присоединить сначала 2, потемъ 7; или къ 7 присоединить 2 и полученную сумму приложить къ 5. Можемъ поступить п такъ: взять какую-нибудь часть 7-и, присоединить къ ней какую-нибудь часть 5-и, потомъ присоединить оставшіяся единицы по одной, по двъ или какъ-нибудь иначе. Всегда получимъ одну и ту же сумму 14.
- 21,а*. Перемъстительное и сочетательное свойства суммы. Свойство суммы, указанное въ предыдущемъ параграфъ, распадается въ сущности на 2 отдъльныя свойства, которыя можно высказать такъ:
- 1) Сумма не изм'вняется отъ перем'вны порядка слагаемыхъ; такъ (если слагаемыхъ взято три):

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=c+b+a=...$$

2) Сумма не измънится, если какія дибо слагаемыя мы вамънимъ ихъ суммою; такъ:

$$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c)$$
.

Первое свойство наз. перем'ястительнымъ, второе—сочетательнымъ; они настолько очевидны, что мы можемъ принять ихъ безъ доказательства.

Зам'єтнию, что сочетательное свойство часто высказывается иными словами, такъ: чтобы къ какому-нибудь числу прибавить сумму, достаточно прибавить къ этому числу каждое слагаемое одно за другимъ; напр.:

$$a+(b+c)=a+b+c$$
.

22. Сложеніе двухъ однозначныхъ чиселъ.

. Чтобы найти сумму двухъ однозначныхъ чиселъ, достаточно къ одному изъ нихъ присчитать все единицы другого. Такъ, присчитывая къ 7 все единицы числа 5, находимъ сумму 12.

Чтобы умъть быстро складывать всякія числа, слъідуеть запомнить всъ суммы, которыя получаются отъ сложенія двухъ однозначныхъ чисель.

23. Сложеніе многозначнаго числа съ однозначнымъ. Пусть требуется сложить 37 и 8. Для этого отъ 37 отдёлимъ 7 ед. и сложимъ ихъ съ 8; получимъ 15. Эти 15 ед. приложимъ къ 30; но 15 все равно что 10 да 5. Приложивъ къ 30-и 10, получимъ 40; приложивъ къ 40 еще 5, получимъ 45.

Можно поступить и такъ. Замътивъ, что къ 37 надо приложить 3, чтобы получить 40, отдълимъ 3 ед. отъ 8 ед. и приложимъ ихъ къ 37; тогда получимъ 40 и еще 5 ед., оставшіяся отъ 8-и, т.-е. получимъ 45.

Слёдуеть привыкнуть выполнять эти дёйствія въ умів и притомъ быстро.

24. Сложеніе многозначныхъ чисель. Пусть требуется найти сумму 4-хъ чисель: 13653, 22409, 1608 и 346. Для этого сложимъ сначала простыя единицы всёхъ слагаемыхъ, потомъ ихъ десятки, затёмъ сотни и т. д. Чтобы при этомъ не смёщать между собою единицъ различныхъ разрядовъ, напишемъ данныя числа одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки—подъ десятками, сотни—подъ сотнями и т. д.; подъ послёднимъ слагаемымъ проведемъ черту:

Сложивъ единицы, получимъ 26, т.-е. 2 десятка и 6 единицъ; 2 десятка запомнимъ, чтобы ихъ сложить съ десятками данныхъ чиселъ, а 6 единицъ запищемъ подъ чертою, подъ единицами слагаемыхъ. Сложивъ десятки

(вмѣстѣ съ тѣми 2 десятками, которые получились отъ сложенія единицъ⁺), получимъ 11 дес., т.-е. 1 сотню и 1 десятокъ. 1 сотню мы запомнимъ, чтобы ее сложить съ сотнями, а 1 десятокъ напишемъ подъ чертою, на мѣстѣ десятковъ. Отъ сложенія сотепъ получимъ 20 сотенъ, т.-е. ровно 2 тысячи; эти 2 тысячи запомнимъ, чтобы ихъ прибавить къ тысячамъ, а подъ чертою напишемъ 0 на мѣстѣ сотенъ. Продолжаемъ такъ дѣйствіе далѣе.

- 24,а. Замѣчанія. 1) Если при сложеній цыфръ какого-нибудь столбца (напр., десятковъ въ данномъ нами примърѣ) встрѣтится цыфра 0, то на нее не обращають вниманія, такъ какъ эта цыфра означаеть отсутствіе числа. Впрочемъ, мы условимся складывать и нули въ томъ смыслѣ, что прибавить 0 къ какому-нибудь числу или прибавить нъ 0 какое-нибудь число значить оставить это число безъ измѣненія. Такъ, 5 да 0 будеть 5, а также 0 да 5 будеть 5.
- 2) Если слагаемыя числа таковы, что сумма единиць каждаго разряда ихъ не превосходить 9-ти, то безразлично, въ какомъ порядкъ производить сложеніе: отъ низшихъ разрядовъ къ высшимъ, или наобороть. Въ другихъ случаяхъ начинать сложеніе съ высшихъ разрядовъ неудобно, потому что отъ сложенія единицъ низшаго разряда могуть получиться одпа или нъсколько единицъ слъ-дующаго высшаго разряда, и тогда придется измѣнять ранъе написанную цыфру.
 - 25. Правило сложенія. Пишуть слагаемое одно подъ другимь такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки—подъ десятками, сотни—подъ сотнями и т. д.; подъ послъднимъ слагаемымъ проводять черту, подъ которою пишуть цыфры суммы по мъръ ихъ полученія.

^{*)} При втомъ полезно всегда начинать сложеніе съ того числа, которое только что вапомнили, чтобы не держать его долго въ умъ. Такъ, складывая десятки, надо говорить: 2 даб...7, да 4...11.

Сначала складывають простыя единицы всёхъ сла-

Если отъ сложенія ихъ получается однозначное число, то пишуть его подъ чертою на мѣстѣ единицъ; если же получается двузначное число*), то единицы его пишутъ подъ чертою, а десятки запоминаютъ, чтобы сложить ихъ вмѣстѣ съ десятками слагаемыхъ.

Потомъ складывають десятки всёхъ слагаемыхъ (вмёстё съ тёми десятками, которые могли образоваться отъ сложенія единицъ). Если отъ сложенія ихъ получается однозначное число, то пишуть его подъ чертою налёво отъ ранёе написанной цыфры простыхъ единицъ; если же получается двузначное число, то единицы его пишутъ подъ чертою, а десятки заџоминаютъ, чтобы сложить ихъ затёмъ вмёстё съ сотнями слагаемыхъ.

Такимъ же путемъ складывають затъмъ сотни слагаемыхъ, за сотнями—тысячи и т. д.

Если при сложеніи единицъ посл'єдняго высшаго разряда получается число двузначное, то его, безъ всякаго изм'єненія, пишуть подъ чертою нал'єво отъ ран'є написанныхъ цыфръ.

26. Сложеніе группами. Если требуется сложить много слагаемыхь, то для удобства ихъ разбивають на нёсколько группъ, производять сложеніе въ каждой группё отдёльно и затёмъ полученныя суммы соединяють въ одну. Такъ какъ сумма не зависить оть того порядка, въ какомъ мы соединяемъ единицы слагаемыхъ, то получившееся такимъ образомъ число будеть надлежащее. Пусть, напр., требуется сложить 10 слагаемыхъ: 286, 35, 76, 108, 93, 16, 426, 576, 45, 72. Разобьемъ эти слагаемыя на группы, напр., такъ:

^{*)} Трехзначное число могло бы получиться только тогда, когда число слагаемыхъ болъе 11; но въ такомь случав удобиве про-изводить сложение по группамъ, какъ указано въ § 26-мъ.

1-я группа.	2-я группа.	3-я группа.	Обірая сумиа.
286			
108	85	16	1396
426	, 93 `	45	-204
576	76	72	·· 133
1396	204	133	1733

Сложивь три суммы въ одну, найдемъ 1733.

27. Повърка сложенія. Чтобы убідиться, что дійствіе сділано вірно, надо его повірнять. Для повірки сложенія обыкновенно складывають слагаемым во второй разь вы ниомы порядкі, чімы вы первый, напр., производя сложеніе снизу вверхъ. Если при второмы сложеніи получается та же сумма, то весьма віроятно, что сложеніе произведено вірно*).

28. Увеличеніе числа на другое число. Увеличить число на нѣсколько единиць значить приложить къ числу эти нѣсколько единиць. Если, напр., требуется увеличить 80 на 25, то это значить, что пребуется къ 80 приложить 25 (получимь 105); значить, увеличеніе числа на другое число выполняется сложеніемь.

III. Вычитаніе.

Задача. Въ коробочкъ было 17 спичекъ; изъ нея вынули 9 спичекъ; сколько спичекъ осталось въ коробочкъ? Для ръшенія задачи надо найти такое число, которос, сложенное съ 9-ю, составляеть 17.

29. Что такое вычитание. Ариеметическое дъй-

Въроятно, а не навърное, потому что и при второмъ сложени можетъ быть сдълана ошибка, подобная той, которая быта при первомъ сложения.

ствіе, посредствомъ котораго по данной суммъ и одному слагаємому находится другое слагаємое, наз. вычитаніємъ.

Такъ, вычесть изъ 17-ти 9 значитъ по дайной суммъ 17 и дапному слагаемому 9 найть другое слагаемое (8); другими словами, узнать, какое число надо сложить съ 9-ю, или къ какому числу надо приложить 9, чтобы получить въ суммъ 17.

Такое дъйствие принято называть вычитаниемъ потому, что посредствомъ него узнается также, какое число останется отъ большого даннаго числа, если отъ него отдълимъ (отнимемъ, вычтемъ) меньшее данное число. Такъ, когда мы по суммъ 17 и слагаемому 9 нашли, что другое слагаемое должно быть 8, то мы узнали вмъстъ съ тъмъ, что если отъ 17 ед. отдълнмъ 9 ед., то останется 8 ед.

При вычитаніи данная сумма наз. уменьшаємымъ, данное слагаємое—вычитаємымъ, а искомое слагаємое—вычитаємымъ, а искомое слагаємое—встаткомъ. Такъ, если наъ 17 вычитаєтся 9, то 17 есть уменьшаємое, 9—вычитаємое; искомое число 8 есть остатокъ. Остатокъ наз. иначе разностью, такъ какъ онъ означаєть также, на сколько данная сумма (уменьшаемое) разнится отъ даннаго слагаємаго (вычитаємаго).

Замѣчанія. 1) Выраженія: «отнять 9 нзъ 17», или «пайти, сколько будеть 17 безъ 9», означають то же, что и «вычесть 9 изъ 17».

- 2) Уменьшаемое не можеть быть меньше вычитаемаго, такъ какъ сумма не можеть быть меньше слагаемаго; напр., нельзя изъ 17 вычесть 20.
- 3) Если уменьшаемое равно вычитаемому, (напр., если изъ 17 вычитается 17), то принято говорить, что въ этомъ случав остатокъ равенъ 0.
- 30. Вычитаніе однозначнаго числа. Чтобы безь затрудненій вычитать всякое число, надо сначала научиться вычитать въ умѣ и притомъ быстро однозначное число изъ однозначнаго и двузначнаго. Искомая

разность легко находится посредствомъ сложенія. Напр., чтобы узнать, сколько будеть 15 безъ 8, пробуемъ прибавлять къ 8 различныя числа, пока не получимъ 15; 8 да 7 составляють 15; слъд., 15 безъ 8 будеть 7.

31. Вычитаніе многозначнаго числа. Пусть требуется изъ 60072 сычесть 7345. Будечъ держаться того же порядка, какъ и при сложеніи, т. е. станемъ вычитать единицы изъ единиць, десятки—изъ десятковъ и т. д.

60072..... уменьшаемое
7345..... вычитаемое
52727..... остатокъ или разность

5 ед. изъ 2 ед. нельзя вычесть; беремь отъ 7 дес. одниъ десятокъ, разлагаемъ его на единицы и прикладываемъ къ 2; получимъ въ уменьшаемомъ единицъ 12, а десятковъ 6. Чтобы запомнить, что десятковъ въ уменьшаемомъ не 7, а 6, поставимъ точку надъ цыфрою 7.

5 ед. изъ 12 ед.... 7 ед. Пишемъ 7 подъчертою на мъстъ едипить.

4 дес. изъ 6 дес... 2 дес.; иншемъ 2 подъ чертою на мъсть десятковъ.

3 сотпи изъ 0 сотепъ вычесть нельзя. Обращаемся къ тысячамъ уменьшаемаго, чтобы взять отъ пихъ одну для раздробленія въ сотни. Но тысячъ въ уменьшаемомъ нътъ. Обращаемся къ сятдующему высшему разряду, т.е. къ десяткамъ тысячъ; если бы и ихъ не оказалось, мы взяли бы сотни тысячъ и т. д. Въ нашемъ примъръ въ уменьшаемомъ естъ 6 десятковъ тысячъ; беремъ отъ нихъ одинъ (въ знакъ чего ставимъ точку надъ цыфрою 6) и раздробляемъ его въ простыя тысячи; получимъ 10 тысячъ. Отъ этихъ 10 тысячъ беремъ одну и раздробляемъ ее въ сотий; тогда получимъ сотенъ 10, тысячъ 9, а десятковъ тысячъ 5: Поставимъ

точку надыцифрою 0 тысячы и условимся, что 0 сь точкой будеть означать число 9. Теперь продолжаемы вычитаніе: 3 сотии изъ 10 сотепь.... 7 сотень; 7 тысячы изъ 9 тысячы.... 2 тысячи; наконець, 5 десятковы тысячы умуньшаемаго перейдуть вы остатокы безы всякаго измінчнія, такы какы изы нихы ничего не вычитается.

Воть еще примъры на вычитаніе:

	. J.T.1.1
6000227	500000
4320423	17236
1679904	482764

Замѣчанія. 1) Если случится, что въ вычитаемомъ на какомъ нибудь мѣстѣ стоитъ 0 (какъ, напр., въ первомъ изъ двухъ послѣднихъ примѣровъ), то производять вычитаніе такъ, какъ указано, при чемъ предполагается, что вычесть изъ накого-нибудь числа 0 значитъ оставить это число безъ измѣненія.

- 2) Вычитаніе удобнёе производить оть низшихъ разрядовъ къ высшимъ потому, что при такомъ порядкё мы, въ случаё надобности, всегда можемъ взять одну единицуизъ высшихъ разрядовъ уменьшаемаго для раздробленія ен въ единицы низшаго разряда.
- 81,а. Правило вычитанія. Пяшуть вычитаемое подъ уменьшаемымь такъ, чтобы единицы стояди подъ единицами, десятки—подъ десятками и т. д.; подъ вычитаемымь проводять черту, подъ которою пишуть цыфры остатка по мъръ ихъ полученія.

Сначала вычитають единицы изъ единиць, потомъ десятки изъ десятковъ, затъмъ сотии изъ сотенъ и т. д.

- . Получаемыя отъ вычитанія числа ставять подъ чертою на мъстъ единиць, когда вычитались единицы, на мъстъ десятковъ, когда вычитались десятки, и т. д.
- Если число единиць какого-нибудь разряда въ умень. шлемомъ окажется меньше числа единицъ того же разряда,

въ вычитаемомъ, то мысленно увеличивають это число на 10 и вмъстъ съ тъмъ въ уменьшаемомъ ставятъ точку надъ первой слъва отъ этого разряда значащей цыфрой, а также и надъ каждымъ изъ нулей, которые могутъ находиться между этимъ разрядомъ и первой слъва значащей цыфрой; тогда при дальнъйшемъ вычитаніи принимають, что точка, стоящая надъ значащей цыфрой, уменьшаетъ ея значеніе на единицу; точка же, стоящая надъ пулемъ, обращаетъ его въ девягь.

- 32. Повърка вычитанія. Такь какь уменьшаемое есть сумма, а вычитаемое и остатокь—слагаемыя, то, для повърки вычитанія, достаточно 'сложить вычитаемое съ остаткомь; если получится число, равное уменьшаемому, то весьма въроятно, что дъйствіе сдълано върно.
- 33. Уменьшеніе числа на другое число. Уменьшить какое-нибудь число на нѣсколько единиць вначить вычесть изъ него эти нѣсколько единиць. Такъ, если требуется 100 уменьшить на 30, то это значить, что требуется изъ 100 отнять 30 (получимь 70).
- 34. Сравненіе двухъ чиселъ. Часто приходится узнавать, на сколько единиць одно число больше пли меньше другого. Чтобы узнать это, надо изъ большаго числа вычесть меньшее. Напр., чтобы узнать, на сколько 20 меньше 35 (или на сколько 35 больше 20) надо изъ 35 вычесть 20; тогда найдемъ, что 20 меньше 35 (или 35 больше 20) на 15 единицъ.
- **35.** Обратныя дѣйствія. Два дѣйствія называются обратными, если искомое число перваго дѣйствія служить данныхь для второго, а одно изъ данныхъ чисель перваго дѣйствія служить искомымь для второго.

Сложеніе и вычитаніе суть дъйствія обратныя. Дъйствительно, при сложеніи даются слагаемыя, а отыскивается ихъ сумма; при вычитаніи, наобороть, дается сумма и одно слагаемов, а отыскивается другое слагаемое.

IV.Славянская и римская нумераціи:

Зб. Славянскан нумерція. Вь церковныхь кингаль и въ памятникаль славянсьой инсьменности унотребляются для изображения чисе ть буквы славянскаго алфавита. Когда буква означасть число, то ставять надъней особый знакъ, называемый титломъ (*), чтобы сразу было відно, что эта буква означаєть не звукъ, а число. Слъдующія 27 буквъ служать для выраження первыхъ 9 чисель, 9 десятковъ и 9 сотепъ.

% (1), % (2), % (3), % (4), % (5), % (6), % (7), % (8), % (9), % (10), % (20), % (30), % (40), % (50), % (60), % (60), % (70), % (800), % (800), % (800), % (800), % (900)

Нъсколько буквъ подъ титломъ, паписанныхъ рядомъ, означаютъ число, равное суммѣ чиселъ, выражаемыхъ каждою буквою. Для обозначеня тысячъ передъ числомъ ихъ ставится знакъ ж Напр.. обозначене жаййй выражаетъ число 1884. Буквы ставятся въ томъ порядкъ, въ какомъ слъдуютъ числа въ славянскомъ произношени. Напр., число 15, произносимое «пять-па-десягь», пишется такъ й, т. е. висчалъ ставится буква, означающая 5, а за нею буква, означающая 10.

37. Римская нумерація. Такъ какъ римскя пыфры и въ настоящее время употребляются иногда для, выражензя чисель, то полезно ознакомиться и съ ними. Римляне употреблями для выражензя чисель только слъдующе семь знаковъ.

I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000.

Ихъ способъ выражать числа существенно отличался отъ нашего. У насъ цыфры измъилють свое значение съ перемъною мъста, а въ римской нумерации цыфры на

всякомъ мѣстѣ сохраняють свое значеніе. Когда написаны нѣсколько римскихъ цыфръ рядомъ, то число, выражаемое имп, равно сумитѣ чиселъ, выражаемыхъ каждой цыфрой; напр., XXV означаетъ сумму 10-и, 10-и и 5-и, т.-е. 25; СLXV означаетъ 165; п т. и. Исключеніе изъ этого правила составляютъ только слѣдующія числа:

$$4=TV$$
, $9=IX$, $40=XL$, $90=XC$, $400=CD$, $900=CM$.

Въ этихъ изображеніяхъ значеніе лѣвой цыфры вычитается изъ значенія правой.

Послѣ этого понятиы будуть слѣдующія изображенія чисель:

I=1, II=2, III=3, IV=4, V=5, VI=6, VII=7, VIII=8, IX=9, X=10, XI=11, XII=12, XIV=14, XVIII=18, XIX=19 XX=20, XXIX=29, XLII=42, LXXXIV=84, XCV=95, CCC=300, DC=600, DCC=700 MDCCCLXXXIV=1884.

Число тысячь изображается такь же, какъ число единиць, только съ правой стороны, впизу, ставять букву m (mille-тысяча); папр.:

CLXXX_mCCCLXIV=180364.

V. Измѣненіе суммы и остатка.

- **38.** Измѣненіе суммы при измѣненіи одного слагаемаго: Такъ какъ сумма содержить въ себѣ всѣ единицы слагаемыхъ, то очевидно, что:
- 1) если нъ какому-либо слагаемому прибавимъ нъсколько единицъ, то сунма увеличится на столько же единицъ;
- 2) если отъ какого-либо слагаемаго отнимемъ нъсколько единицъ, то сумма уменьшится на столько же единицъ ...

^{*).} Первое изъ указанныхъ измъненій суммы представляетъ собою слъдствіе сочетательнаго и перемъстительнаго свойствъ

Примѣръ:	73	73	73			
	18	20 (ув. па 2)	18			
	40	40	30	(ум.	на	10)
	131	133 (ув. на 2)	121	- (уы.	па	10)

Этими свойствами суммы иногда пользуются при устнемъ сложени. Пусть, напр., требуется къ 427 приложить 68. Искомую сумму мы найдемъ быстро, если къ 427 приложемъ не 68, а 70 (получимъ 497), а затъмъ уменьшимъ найденное число на 2 (получимъ 495).

82. Измѣненіс суммы при измѣненіи нѣсколькихъ слагаемыхъ. Если одновременно изъѣнимъ нѣсколько слагаемыхъ, то сумма иногда увеличится, иногда уменьшится, или же можеть остаться безъ перемѣны. Чтобы предугадать зарэпѣе, что произойдетъ съ суммою, надо предположить, что сначала измѣнено только одно слагаємое, потомъ другое, затѣмъ третье... и каждый разъ опредѣлять, какъ будетъ измѣняться сумма. Напр.:

75	Ум еньшимъ	з-е	слаг.	на	8	•	•	٠.	67
	Уменьшимъ								
25	Увеличимъ	2-е	слаг.	па	5				30
30	Увелпчинъ	1-e	слаг.	на	10				40

Отъ увеличенія перваго слагаемаго па 10 сумма увеличится на 10. Отъ увеличенія второго слагаемаго на 5 сумма еще увеличится на 5; значитъ, противъ прежняго

^{(§ 21} а). Действительно, если въ суммѣ a+b+c уреличимъ какоенибудь слагаемое b на m, то получимъ новую сумму a+(b+m)+c, которая, согласно сочетательному свойству, равна суммѣ a+b+m+c. а вта сумма, согласно перемъстительному свойству, равна (a+b+c)+m. Такимъ образомъ, отъ уреличенія какого-нибудь слагаемаго на m сумма также уреличивается на m.

Второе изъ указанныхъ измѣненій есть слѣдствіе перваго измѣненія. Дѣйствительно, если въ суммѣ a+(b-m)+c увеличимъ слагаемос b-m из m, то получимъ новую сумиу a+b+c, которая, согласно 1-му измѣнению, должна быть больше прежней суммы на m; а вто, другими словами, значитъ, что сумма a+b-c на m.

она увеличится на 10 и на 5, т.-е. на 15. Отъ уменьшенія третьяго слагаемаго на 8 сумма уменьшится на 8; вначить, противъ прежней она увельчится на 15 безъ 8, т.-е. на 7, и, слёд., будеть 137.

- 40. Измѣненіе остатка при измѣненіи одного изъ данныхъ чиселъ. Такъ какъ уменьшаемое есть сумма, а вычитаемое и остатокъ—слагаемыя, то легко понять, что:
- 1) если къ уменьшаемому прибавимъ нѣсколько единицъ, то остатокъ увеличится на столько же единицъ;
- 2) если отъ уменьшаемаго отнимемъ нѣсколько единицъ, то остатокъ уменьшится на столько же единицъ;
- 3) если къ вычитаемому прибавимъ нѣсколько единицъ, то остатокъ уменьшится на столько же единицъ;
- 4) если отъ вычитаемаго отнимемъ нъсколько единицъ, то остатокъ увеличится на столько же единицъ.

Указанныя свойства полезно имъть вь виду при устномъ вычитаніи. Чтобы вычесть, напр., 28 изъ 75, мы можемъ вычесть изъ 75 не 28, а 30 (получимъ 45), но зато полученное число мы должны увеличить на 2 (получимъ 47).

41. Измѣненіе остатка при измѣненіи обоихъ данныхъ чиселъ. Если станемъ измѣнять одновременно и вычитаемое, и уменьшаемое, то остатокъ иногда увеличится, иногда уменьшится, или же можеть остаться безъ перемѣны. Напр.:

Отъ увеличенія уменьшаемаго на 10 остатокъ увеличивается на 10; отъ увеличенія вычитаемаго на 15 остатокъ уменьшается на 15. Значитъ, къ остатку прибавляется 10 и отнимается 15; отъ этого остатокъ уменьшается на 5; значитъ, онъ будеть 20.

Следуеть обратить особое внимание на случан, когда; ъзсмотря на изменение данныхъ чиселъ, остатокъ не из-

если уменьшаемое и вычитаемое увеличимъ на одно и то же число, то остатонъ не измѣнится;

если уменьшаемое и вычитаемое уменьшимъ на одно и то же число, то остатонъ не измѣнится. Напр.:

VI. Знаки дъйствій, скобки, формулы.

42. Знаки дъйствій. При инсьменномъ решеній задачь часто приходится писать рядомь другь съ другомъ данныя числа для различныхь дъйствій. Въ такихъ случаяхъ полезно отличать одно дъйствіе отъ другого посредствомъ какихъ-нибудь з наковъ. Условились обозначать сложеніе знакомъ плюсъ+, а вычитаніе знакомъ минусъ —. Напр.:

$$\begin{array}{cccc}
+\frac{446}{235} & -\frac{446}{235} \\
\hline
681 & 211
\end{array}$$

Иногда бысаеть нужно, не производя дъйствій на самомъ дъль, только указать знаками, какія дъйствія надо выполнить надъ данными числами. Положимъ, напр., надо указать, что числа 10, 15 и 20 требуется сложить. Тогда пишуть данныя слагаемыя въ одну строку и ставятъ между ними знакъ сложенія: 10+15+20. Такъ какъ сумма не зависить отъ порядка, въ какомъ мы соединяемъ единицы слагаемыхъ, то безразлично, въ какомъ порядкъ писать слагаемыя.

Если надо указать, что изъ одного числа требуется вычесть другос, то пишуть уменьшаемое и вычитаемое въ одну строку и ставять между ними знакъ —. Такъ, выражение 10—8 означаеть, что надо изъ 10 вычесть 8.

Выраженіе 10+15+20 читается такъ: 10 илюсъ 15 плюсъ 20, или же: сумма 10-и, 15-и и 20-и. Выраженіе 10-8 читается такъ: 10 минусъ 8, или же: разность 10-и и 8-и.

Если надъ данными числами надо произвести рядъ послъдовательныхъ сложеній и вычитаній, то пишуть числа въ строку въ томъ порядкъ, въ какомъ надо произвести падъ ними дъйствія. Такъ, выраженіе 10+15-2+3 означаетъ, что къ 10-и надо приложить 15, отъ полученной суммы отиять 2 и къ разности приложить 3.

- 43. Знаки равенства и неравенства. Въ арпометикъ употребительны еще знаки: =, > и <. Первый наз. знакомъ равенства и замъняетъ собою слово «равно» или «равинется»; два другіе наз. знаками неравенства и означаютъ: знакъ > «больше», а знактъ < «меньше»; напр., выраженія 7+8=15, 7+8>10 и 7+8<20 читаются такъ: 7 илюсъ 8 равно 15; 7+8 больше 10; 7+8 меньше 20. Слъдустъ поминть, что знаки > и < должны быть обращены остреемъ угла къ меньшему числу.
- 44. Скобки и формуны. При ръшеніи задачь весьма полезно раньше совершенія дъйствій указать, какія дъйствія и въ какомь порядкь надо выполнить надъ данными числами, чтобы дойти до отвъта на предложенный вопрось. Положимь, напр., что для ръшенія какойнибудь задачи надо сначала сложить 35 и 20, потомъ эту сумму вычесть изъ 200. Чтобы указать это, иншуть такь: 200—(35+20)

Здёсь сумма 35+20 заключена въ скобки, передъ которыми поставленъ знакъ—; тогда этотъ знакъ означаетъ, что изъ 200 падо вычесть не 35, а сумму 35+20, т.-е. 55.

Иногда выраженіе, содержащее скобки, приходится заключить въ новыя скобки; въ такомъ случав употребляють скобки различной формы, чтобы отличить ихъ одив отъ другихъ; напр., такое выраженіе:

означаетъ: сложеть 7 и 8 (получимъ 15); найденную сумму (15) сложить съ 60 (получимъ 75); вычесть найденное число (75) изъ 160 (получимъ 85); сложить полученное число съ 100 (получимъ 185).

Выраженіе, показывающее, какія дъйствія и въ какой послъдовательности надо выполнить надъ данными числами, чтобы получить искомое число, наз. формулой.

Вычислить формулу значить найти число, которое получится послё выполненія всёхь дёйствій, указанныхъ въ формулё.

VII. Умноженіе.

Задача. Одна тетрадка стоить 7 коп.; еколько стоять 4 такія тетрадки?

Для решенія задачи надо найти сумму 7+7+7+7, т.-е. повторить число 7 слагаемых 4 раза.

45. Что такое умножение. Ариеметическое дъйствіе, посредствомъ котораго одно данное число повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ данномъчислъ находится единицъ, наз. умножениемъ.

Такъ, умножить 7 на 4 значить повторить число 7 слагаемымъ 4 раза, т.-е. найти сумму 7+7+7+7.

Такимъ образомъ, умноженіе представляєть собою сложеніе одинаковыхъ слагаемыхъ и, слъд., оно всегда можеть быть выполнено посредствомъ обыкновенцаго сложенія. Но такое сложеніе очень утомительно въ томъ

случав, когда число слагаемых велико. Ариометика указываеть болве удобный способь нахожденія суммы одинаковых слагаемых посредствомь особаго двйствія, называемаго умноженіемь.

Число, которое должно повторить слагаемымъ, называется множимымъ, а число, которое цоказываетъ, сколько разъ надо множимое повторить слагаемымъ, называется множителемъ. Число, полученное послъ умноженія, называется произведеніемъ. Напр.; когда 7 умножается на 4, то 7 есть множимое, 4—множитель, а получившееся послъ умноженія число 28—произведеніе.

Множимое и множитель безразлично наз. сомножителями.

Принято обозначать умножение посредствомь особаго знака. Если, напр., 7 надо умножить на 4, то пишуть такъ: 7×4 , или $7 \cdot 4$, т.-е. пишуть множимое, справа отъ него знакъ умножения (косой крестъ или точка), а справа отъ знакъ ставятъ множителя; такое обозначение замъняетъ собою сумму 7+7+7+7.

Замъчанія. 1) Множитель—всегда число отвлеченное, такъ какъ онъ означаеть, сколько разъ множимое должно быть повторено слагаемымь;

- 2) множимое можеть означать единицы какого угодно названія, напр., аршины, рубли, карандаши и т. и.;
- . 3) произведение должно означать единицы того же наввания, какъ и множимое.

Такъ, если 7 рублей умножаются на 4, то получаются 28 рублей, а не какихъ-либо другихъ единицъ.

- 45,а. Нъкоторые особые случаи умноженія. 1) Если множимоє есть 1, то произведеніє равно множителю; такъ, $1 \times 5 = 5$, потому что сумма 1+1+1+1+1 составляеть 5.
 - 2) Если множимое есть 0, то произведение равно 0; напр.,

 $0\times 4=0$, потому что сумма 0+0+0+0, какъ мы условились ранъе (§ 24,a), должна считаться равной 0.

Такъ какъ повторить какое-инбудь число слагаемымъ одинъ разъ или ин одного раза, оченидно, пельзя, то, значить, множитель не можетъ быть ин 1, ин 0. Тъмъ не менте допускають умножение и из 1, и на 0, придавая этому умножению слъдующий условный смыслъ:

- 3) Если множитель есть 1, то произведение равно мнсжимому; напр., произведение $5 \times 1 = 5$.
- 4) Если множитель есть нуль, то произведение равьо 0; напр., $5\times0=0$.
- . 46. Увеличеніе числа въ нѣсколько разъ. Увеличнъ число въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза п т. д.— значить посторить это число слагаемымь 2 разъ—значить посторить 10 км 5 разъ—значить посторить 10 слагаемымь 5 разъ, т.-е. умножить 10 на 5. Такимъ образомъ, увеличеніе числа въ нѣсколько разъ выполняется умноженіемъ (тогда какъ увеличеніе числа на како е-и и будь число выполняется сложеніемъ).
- 47. Перемъстительное свойство произведенія. Возьмемъ какое-нибудь произведеніе, напр. 5×4. Оно представляеть ссбою сумму:

Разложимъ каждее слагаемое этой суммы на отдъльным единицы:

первое слагаемое = 1+1+1+1+1второе » = 1+1+1+1+1третье » = 1+1+1+1+1четвертое » = 1+1+1+1+1

Сумма доджна содержать въ себъ всъ эти единицы. Со-

считаемъ ихъ. Если мы будемъ считать эти единицы горизонтальными строками, то получимъ: 5+5+5+5 (т.-е.
5×4); а если будемъ считать ихъ вертикальными столбцами, то найдемъ: 4+4+4+4+4 (т.-е. 4×5). Такъ какъ
сумма не зависитъ отъ порядка, въ какомъ мы соединяемъ
единицы слагаемыхъ, то въ результатъ мы должны получить одно и то же число; слъд.:

$$5\times4=4\times5$$
.

Значить, произведение не измъняется отъ перемъны порядка сомножителей. Свойство это наз. и е р е м ъ с т ите льнымъ.

Замѣчанія. 1) Перемѣстительное свойство остается вѣрнымъ и тогда, когда множитель есть 1 или 0; такъ, $1 \times 5 = 5$ и $5 \times 1 = 5$; $0 \times 4 = 0$ и $4 \times 0 = 0$.

- 2) Надо однако имѣть въ виду, что, перемѣщая множителя сотавлять отвлечены мы; напр., нельзя писать: 8 руб. $\times 3 = 3 \times 8$ руб., такъ какъ умиоженіе на предметное число не имѣеть смысла; правильно будеть написать: 8 руб. $\times 3 = 3$ руб. $\times 3$.
- **48. Умноженіе** однозначнаго числа на однозначное. Пусть требуется умпожить 7 на 3. Для этого достаточно посторить 7 слагаемыхъ 3 раза:

$$7 \times 3 = 7 + 7 + 7 = 21$$

(семь да семь-четырнадцать, да еще семь-двадцать одинь).

Чтобы умъть быстро производить умножение всякихъ чиселъ, надо запомнить всъ произведения однозначныхъ чиселъ. Для этого составляють, при помощи сложения, таблицу умножения и заучивають ее.

Таблица умноженія.

	ACCORDING TO SERVICE AND ADDRESS OF THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO PERSONS ASSESSMENT OF THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO PERSON NAMED IN COLUMN TRANSPORT NAMED IN C		Contract of the second
$2\times2=4$	2×3≔ 6	$2 \times 4 = 8$	2×5=10
$3\times 2=6$	$3\times3=9$	$3\times4=12$	$3\times5=15$
$4\times 2=8$	$4\times3=12$	$4\times 4=16$	4×5=20
5×2=10	$5\times3=15$	$5\times4=20$	$5\times5=25$
$6\times2=12$	$6\times3=18$	$6\times 4=24$	$6\times5=30$
$7\times2=14$	$7\times3=21$	$7\times4=28$	$7\times5=35$
8×2=16	$8\times3=24$	$8\times4=32$	8×5=40
9×2=18	$9\times3=27$	$9\times4=36$	$9\times5=45$
2×6=12	$2\times7=14$	2×8=16	2×9=18
3×6=18	$3 \times 7 = 21$	3×8=24	3×9=27
$4\times 6=24$	$4\times7=28$	4×8=32	4×9=36
5×6=30	$5\times7=35$	5×8=40	5×9=45
6×6=36	$6\times7=42$	$6\times8=48$	6×9=54
$7\times6=42$	$7\times7=49$	7×8=56	7×9=63
$8\times 6=48$	$8\times7=56$	$8\times8=64$	8×9=72
$9\times6=54$	$9\times7=63$	$9\times8=72$	9×9=8

Обыкновенно эту таблицу заучивають такъ:

$$2 \times 2 = 4$$
 дважды два—четыре $3 \times 2 = 6$ дважды три—шесть

.

5×3=15 трижды пять—пятнадцать (т. е. произносять спачала множителя, а потойъ множимое).

При этомъ достаточно заучить только тѣ произведенія, которыя напечатаны крупно: остальныя отличаются отъ! этихъ только порядкомъ сомножителей.

49. Умноженіе многозначнаго числа на однозначное. Пусть требуется умножить 846 на 5 Принято располагать дійствіе такъ:

846

Хõ

т.-е. пишуть множимое, подъ нимъ множителя; подъ множителемъ проводять черту; сбоку ставять знакъ умноженія. Подъ чертою пишуть цыфры произведенія по мърътого, какъ ихъ получають.

Умножить 846 на 5 значить повторить 846 слагаемымъ 5 разъ. Для этого достаточно повторить 5 разъ спачала единицы множимаго, потомъ его десятки, затъмъ сотни. Произведенія найдемъ по таблицъ умноженія.

Пятью 6 . . . 30 ед., т.-е. 3 десятка; ставимъ 0 подъ чертою на мъстъ единицъ, а 3 десятка запоминаемъ.

Пятью 4 десятка—20 десятковъ; да 3 дес... 23 дес., т.-е. 2 сотни и 3 дес.; ставимъ 3 десятка подъ чертою на мъстъ десятковъ, а 2 сотнилзайоминаемъ.

Пятью 8 сотенъ... 40 сотенъ; да 2 сотни... 42 сотни; ставимъ подъ чертою 42 сотни, т.-е. 4 тысячи и 2 сотни.

Произведение 846 на 5 оказывается 4230.

50. Правило умноженія многозначнаго числа на однозначное. Пишуть множимое, подъ нижь множителя, подъ множителемъ проводять черту.

Умножають (по таблицѣ умноженія) единицы множимаго на множителя. Если отъ этого получится однозначное число, то его пишуть подъ чертою на мѣстѣ единицъ; если же получится двузначное число, то десятки его запоминають, а единицы пишуть подъ чертою.

Умножають затёмъ (по таблицё умноженія) десятки множимаго на множителя и къ полученному числу прикладывають въ умё то число десятковъ, которое могло получиться отъ умноженія единиць. Если послё этого получится число однозначное, то его пишуть подъ чертою на мёстё десятковъ; если же получится число двузначное, то десятки его запоминають, а единицы пишуть подъ чертою.

Такъ же умножають на множителя сотни множимаго, за сотнями—тысячи множимаго, и т. д.

Умноживши последнюю цыфру множимаго, пишуть по-

лученное ста этого число, котя бы оно было и двузначное, нода чертою, влёво отъ ранёе написанных цыфра.

51. Умноженіе на 1 съ однимъ или съ нъсколькими нулями. Пусть требуется умпожить:

 358×10 .

Умиожеть 358 на 10 значить понторить число 358 сдагаемымь 10 разъ. Чтобы легче узнать, сколько получится, повторимь 10 разъ каждую изъ 358 единиць. Одна единица, повторенная 10 разъ, дасть десятокъ; значить, если каждую изъ 358 ед. повторимъ 10 разъ, то получимъ 358 десятковъ, что составляеть 3580 единиць.

Возьмемь еще другой примъръ:

296×1000

Одна единица, повторенная 1000 разъ, составляеть одну тысячу; слъд., 296 единицъ, повторенныя 1000 разъ, составляють 296 тысячь, что иншется такъ: 296000.

•Правило. Чтобы умножить число на единицу съ нулями, приписывають ко множимому справа столько нулей, околько ихъ есть во множитель.

52. Умноженіе на какую-нибудь аначащую цыфру съ однимъ или съ нѣсколькими нулями. Пусть требуется умножить:

348×30

Умножить 248 на 30 значить повторить 248 слагаемымь 80 разъ: Но 30 слагаемыхъ можно соединить въ 10 одинаковыхъ групиъ, по 3 слагаемыхъ въ каждой групиъ:

744	744	744	744	744	.744	744	744	744	744
248	248	248	24 8	248	248	248	248	248	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
248	248	218	248	248	248	248	248	248	248

Вижето того, чтобы 248 повторять слагаемымь 3 раза,

мы можемь умножить 248 на 3, и вывсто того, чтобы 744 повторять 10 разь, мы фожемь умножить 744 на 10. Значить, для умноженія какого-нибудь числа на 30 достаточно учножить его на 3 и полученьое произведеніе умножить на 10 (для чего вадо принисать справа одинь нуль):

$$248 \times 3 = 714$$
; $744 \times 10 = 7440$.

Возьмемъ еще другой примъръ: 895 × 400.

Въ этомъ примъръ требуется повторить число 895 слагаемымъ 400 разъ. Но 400 слагаемыхъ можно соединить въ 100 группъ по 4 слагаемыхъ въ каждой группъ. Чтобы узпать, сколько единицъ въ одной группъ, падо 895 учножить на 4 (получимъ 3580); чтобы загъмъ узпать, сколько единицъ во всъхъ группахъ, надо 3580 учножить на 100 (для чего достагочно приписать 2 пуля).

Дъйствіе удобите всего расположить такь:

$$\begin{array}{cccc}
 & 248 & 895 \\
 & \times 30 & \times 400 \\
\hline
 & 7440 & 358000
\end{array}$$

т.-е. множителя падо писать такъ, чтобы его нули стояли изправо отъ множичаго.

Правыло. Чтобы умножить число на накую-нибудь значащую цыфру съ нулями, умножаютъ множимое на эту значащую цыфру и къ произведенію приписываютъ справа столько нулей, сколько ихъ есть во множитель.

Замъчаніе. Правило этого (дапредыдущаго) нараграфа выражено не сопствъ точно: Уумножать на цыфру нельзя, такъ какъ цыфра—не число, а письменный знакъ числа; когда мы умпожаемъ на 7, мы умножаемъ не на цыфру 7, а на число, изображаемое этой цыфрою. Точно такъ же: не къ произведенію приписываются нули, а къ цыферному изображенію произведенія, и не столько нулей.

сколько ихъ есть во множителъ, а столько нулей, сколько ихъ есть въ цыферномъ изображении множителя.

Однако, ради краткости ръчи, мы будемъ и далье употреблять такія неправильныя выраженія, условившись понимать ихъ указаннымъ образомъ.

53. Умноженіе многозначныхъ чиселъ. Пусть требуется сдълать умноженіе

$$3826 \times 472$$
.

Умножить 3826 на 472 значить повторить число 3826 слагаемымъ 472 раза. Для этого достаточно повторить 3826 слагаемымъ 2 раза, потомъ 70 разъ, потомъ 400 разъ и полученныя суммы соединить въ одну; другими словами, достаточно 3826 умножить на 2, потомъ на 70, затъмъ на 400 и полученныя произведенія сложить.

3826	3826
×472	×472
7652	7652
26782 0	26782
1530400	15304
1805872	1805872

Дъйствіе расположимъ такъ: пишемъ множимое, подъ нимъ множителя, подъ множителемъ проводимъ черту.

Умножаемъ множимое на 2 и полученное произведение пишемъ подъ чертою; это будетъ первое частное произведение (именно 7652).

Умножаемъ множимое на 70; для этого достаточно умножить множимое на 7 и къ произведенію приписать справа одинъ нуль; поэтому мы ставимъ 0 подъ цыфрою единицъ перваго частнаго произведенія, а цыфры, получаемыя отъумноженія множимаго на 7, пишемъ, по порядку ихъ полученія, подъ десятками, сотнями и прочими разрядами перваго частнаго произведенія. Это будетъ второе частное произведеніе (267820).

Умножаемь множимое на 400. Для этого достаточно умножить 3826 на 4 и къ произведению приписать справа два нуля. Пишемъ два нуля подъ единицами и десятками второго частнаго произведения, а цыфры, получаемыя отъ умножения множимаго на 4, пишемъ, по порядку ихъ получения, подъ сотнями, тысячами и прочими разридами второго частнаго произведения. Тогда получимъ третье частное произведение (1530400).

Подъ послъднимъ частнымъ произведеніемъ проводимъ черту-и складываемъ всъ ихъ.

Для сокращенія письма обыкновенно не пишуть нулей, указанныхь нами жпрнымь шрифтомь; при этомь падо только помнить, что, умножая множимое на цыфру десятковь множителя, мы должны писать первую полученную цыфру подь десятками перваго частнаго произведенія; умножая на цыфру сотень множителя, пишемь первую полученную цыфру подь сотиями предыдущихь частныхь произведеній, и т. д.

Замѣчанія. 1) Если вь числь цыфрь множителя есть 1, то, умножая множимое на эту цыфру, надо имѣть въ виду, что, когда мпожитель есть 1, произведеніе принимается равнымъ множимому.

2) Когда во множителѣ встрѣчаются нули, то на нихъ не умножаютъ, а переходятъ прямо къ умноженію на слѣдующую значащую цыфру множителя.

Примѣръ:	470827
	60013
,	1412481
•	470827
	2824962
	28255740751

54. Правило умноженія многозначныхъ чиселъ. Подписывають подъ множимымъ множителя подъ множителемъ проводять черту.

Умножають множимое телько на значащія цыфры множителя: сначала на цыфру его единиць, потомъ на цыфру его десятковъ, затёмъ на цыфру сотень и т. д.

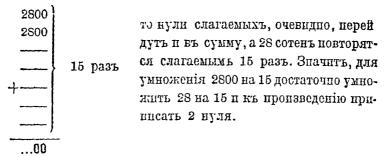
Получаемыя оть этихь умноженій частныя произведенія пишуть подъ чертою одно подъ другимъ, наблюдая, чтобы первая справа цыфра каждаго частнаго произведенія стояла на одной вертикальной линіи съ тою цыфрою множителя, на которую умножають.

Всъ частныя произведенія складывають между собою.

55. Умноженіе чиселъ, оканчивающихся **нулями.** Сначала возьмемъ примёръ, въ поторомъ только одно множемое сканчивается нулями:

2800×15 .

Умножить 2800 на 15 значить повторить 2800 слагаемымъ 15 разъ. Если станемъ находить эту сумму обыкновеннымъ сложениемъ:



Дъйствие располагають такъ:

2800 т.-с. пишуть множителя такь, чтобы нули мно-×15 жимаго стояли направо оть множителя, произво-140 дять умноженіе, не обращая винманія на нули 28 множимаго, а къ произведенію ихъ принисывають 42000 справа.

Возьмемъ теперь примъръ, въ которомъ только одинъ множитель оканчивается нулями:

 358×23000 .

358 - Чтобы повторить 358 слагаемымь 23000 разь, ×23000 можно повторить 358 слагаемымь 23 раза (т.е. 1074 умножить 358 па 23) и полученное число повторить слагаемымь 1000 разь (т.е. умножить на 8234000 1000, для чего достаточно принисать справа три нуля). Дъйствіе располагають такь, какь Указано въ примъръ.

Наконець, разсмотримь примъръ, въ которомъ оба данныя числа оканчиваются нулями:

57000×3200.

57000	Для умноженія 57000 на какое-нибудь число,		
×3200	надо умножить 57 на эго число и къ произве-		
114	денію принисать три нуля. Но чтобы умножить		
171	57 на 3200, надо умножить 57 на 32 и къ про-		
182400000	пзведенію приписать два нуля. Поэтому, когда		
	множимое и множитель оканчивлются нулями,		
производят	ъ умножение, не обращая внимация на нули		
и къ произведению принисывають столько нулей, сколько			
ихъ есть в	о множимомъ и во мпожителѣ виъстъ.		

56. Умноженіе въ порядкъ, обратномъ принятому. Во всъхъ предыдущихъ примърахъ множимое умножалось сначала на единицы множителя, потомъ—на его десятки, затъмъ—на его сотии, и т. д. Но можно производить умноженіе въ обратномъ порядкъ. Напр.:

2834	2834
×568	×568
22672	14170
17004	17004
14170	22672
1609712	. 1609712

Единственная разница между этими пріємами умноженія—та, что, подписывая частныя произведенія одно подъ другимъ, приходится отступать влѣво, если дѣйствіе ведется по первому прієму, и вправо, если оно совершается по второму прієму. Первый пріємъ болѣе употребителенъ.

57. Провърка умноженія. Такъ какъ произведеніе не измѣняется оть перемѣны мѣстъ сомножителей, то для повѣрки умноженія достаточно совершить его во второй разъ, умножая множителя на множимое. Напр.:

Умноженіе:	Повѣрка:
532 ,	145
×145	$\times 532$
2660	290
2128	435
532	725
77140	77140

Оба произведенія оказались одинаковы; слѣд., весьма ътроятно, что дъйствіе сдълано върно.

58. Произведеніе трехъ и болѣе сомножителей. Пусть имѣемъ нѣсколько чисель, напр.: 7, 5, 3 и 4. Составимъ изъ нихъ произведеніе такимъ образомъ: умноживъ первое число на второе, получимъ 35; умноживъ 35 на третье число, получимъ 105; умноживъ 105 на четвертое число, получимъ 420. Число 420 называется произведеніемъ четырехъ сомножителей: 7, 5, 3 и 4.

Для обозначенія такихъ послѣдовательныхъ умноженій пишутъ данныя числа въ одну строку въ томъ порядкѣ, въ какомъ требуется производить надъ ними умноженіе, и ставятъ между ними знакъ умноженія. Такимъ образомъ, выраженіе:

3.4.2.7 или $3\times4\times2\times7$ равносильно такому: [(3.4).2].7,

- т.-е. означаетъ, что 3 умножается на 4, полученное произведеніе—на 2 и это последнее произведеніе—на 7.
- 59. Перемъстительное свойство произведеній. Произведеніе не измъняется отъ перемъны порядка сомножителей.

Мы уже убъдились въ этомъ для произведенія двухъ сомножителей (§ 47). Это же свойство принадлежить и произведенію сколькихъ угодно сомножителей. Напр., вычисливъ каждое изъ произведеній:

2. 5. 3. 4. 7 \parallel 2. 3. 4 .5. 7 \parallel 4. 7. 3. 2. 5 \parallel 7. 2. 3. 4. 5, отличающихся только порядкомъ сомножителей, мы получимъ одно и то же число 840.

Такъ какъ каждый изъ сомножителей можеть быть поставленъ на концѣ, т.-е. можетъ быть принять за множителя, то всѣ они часто называются множителями.

- 59,а*. Доназательство перемъстительнаго свойства. Чтобы доказать перемъстительное свойство для всевозможныхъ произведеній, будемь вести разсужденіе въ такой послъдовательности.
- Во-1) докажемъ, что можно переставить, не измѣняя произведенія, двухъ рядомъ стоящихъ сомножителей; напр., докажемъ, что если въ произведеніи 2. 5. 3. 4. 7 переставимъ сомножителей 3 и 4, то произведеніе не измѣнится.

Отбросимъ пока посл'вдняго сомножителя; тогда получимъ такое произведеніе: 2. 5. 3. 4 или 10. 3. 4. Чтобы вычислить это произведеніе, надо 10 повторить слагаемымъ 3 раза и полученное число повторить слагаемымъ 4 раза; значить:

$$10.3.4 = (10+10+10)+(10+10+10)+$$

 $+(10+10+10)+(10+10+10).$

Но сумму эту можно вычислить и такимъ образомъ: возьмемъ отъ каждаго слагаемаго суммы по 10; тогда получимъ 10+10+10+10+10, т.-е. 10.4; взявъ отъ каждаго слагаемаго еще 10, снова получимъ 10.4; наконецъ, взявъ въ третій разъ по 10, получимъ еще 10.4. Всего мы, такимъ образомъ, получимъ: (10.4)+(10.4)+(10.4), т.-е. 10.4.3.

Но сумма не вависить отъ того порядка, въ какомъ мы соедиплечъ единины слагаемыхъ; значитъ, 10.3.4=10.4.3. Умноживъ каждое изъ этихъ произведени на отброшеннаго раньше сомножителя 7, мы не нарушимъ равенства между ними; тогда будемъ имътъ:

Во-2) докажемъ, что можно переставить, не изм'вля произведенія, двухъ какихъ угодно сомножителей; напр., докажемъ, что въ произведеніп 2.5.3.4.7 можно переставить сомножителей 5 п 7.

Сомножителя 5 можно переставить съ 3, потому что эти сомножители стоятъ рядомъ. Затъмъ, по той же причинъ, 5 можно переставить съ 4 п, наконецъ, съ 7. Такимъ образомъ сомножитель 5 будетъ переведенъ на то мъсто, которое занималъ прежде сомножитель 7, и мы будемъ имъть произведенто 2.3.4.7.5. Переставляя теперъ сомножителя 7 съ 4, а потомъ съ 3, мы переведемъ его на то мъсто, которое прежде занималъ сомножитель 5. Такимъ образомъ:

$$2.5.3.4.7 = 2.7.3.4.5$$

Наконець, въ 3) докажемъ, что произведение не измънится, если переставимъ его сомножителей какъ угодно; напр., докажемъ, что въ произведени 2.5.3.4.7 сомножителей можно переставить такъ: 3.7.5.4.2.

Сравнивая последнее произведеніс съ даннымъ, видимъ, что сомножитель 3 долженъ стоять на 1-мь месте. Для этого мы поменлемь его местами съ 2, что можно сделать по доказанному раньше. Тогда получимъ новое произведеніе 3.5.2.4.7. Теперь сомножителя 7 переведемь на второе место; для этого переставимъ его съ 5; получимъ 3.7.2.4.5. Въ этомъ произведеніи перстамъ 5 съ 2; тогда получимъ: 3.7.5.4.2. Теперь во для дожители приведены въ требуемый порядокъ, при части приведеніе ни разу не изменилось.

60. Какъ умножить на произведеніе. Мы видьли (§ 52), что если требуется умножить какое-нибудь

число на 30 (т.-е. на произведеніе 3.10), то достаточно умножить это число на 3 и полученное число умножить на 10; также для умноженія какого-нибудь числа на 400 (т.-е. на произведеніе 4.100) можно умножить это число на 4 и полученное число на 100. Подобнымъ образомъ можно поступать всегда, если множитель представляеть собою произведеніе. Пусть, напр., требуется умножить 10 на 12, т.-е. на произведеніе 3.4. Для этого достаточно 10 умножить на 3 и полученное произведеніе умножить еще на 4. Дъйствительно, умножить 10 на 12 значить найти сумму:

$$10+10+10+10+10+10+10+10+10+10+10+10$$
.

Но сумму эту мы можемъ вычислить, соединивъ слагасмыя въ 4 одинаковыхъ группы по 3 слагаемыхъ въ каждой группъ:

$$(10+10+10)+(10+10+10)+(10+10+10)+(10+10+10);$$

тогда въ каждой группъ единицъ будетъ 10.3, а во всъхъ группахъ ихъ окажется 10.3.4. Значитъ:

$$10 \times (3 \times 4) = 10 \times 3 \times 4$$
.

Подобно этому можно убъдпться, что

$$7 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4) = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Правило. Чтобы умножить какое-нибудь число на произведение и вскольких в чисель, достаточно умножить множимое на перваго сомножителя, полученное число умножить на второго сомножителя, потомъ на третьяго, и т. д.

Этимъ правиломъ пользуются иногда при устномъ умноженіи; напр., чтобъ умножить 36 на 8 (т.-е. на произведеніе 2.2.2), можно 36 удвоить (получимъ 72), еще удвоить (получимъ 144) и еще разъ удвоить (получимъ 288).

61. Сомножителей произведенія можно соединять въ группы. Уб'єдимся еще въ слудую-

щемъ свойствъ: произведение не измънится, если накихънибудь сомножителей мы замънимъ ихъ произведениемъ.

Напр., какъ мы сейчасъ видъли, произведеніе 10.3.4 даетъ такое же число, какъ и произведеніе 10.(3.4); или произведеніе 7.2.3.4 даетъ такое же число, какъ и произведеніе 7.(2.3.4).

Этимъ свойствомъ иногда пользуются для болье удобнаго вычисленія произведенія. Напр., чтобы вычислить произведеніе 25.7.4.8, всего удобнъе сгруппировать сомножителей такъ: 25.4=100; 7.8=56; 56.100=5600.

61,а*. Сочетательное и распредълительное свойства произведенія. Свойства, изложенныя въ §§ 60 и 61, составляють въ сущности одно и то же свойство, которое можеть быть выражено такимъ равенствомъ (если сомножителей взяго 3):

$$a(bc)=abc$$
 или $abc=a(bc)$.

Свойство это наз. сочетательнымъ свойствомъ произведенія.

Къ свойствамъ перемъстительному и сочетательному надо еще добавить третье свойство произведенія, распредълительное, выражаемое равенствомъ (если сомножителей взято три):

$$(a+b)c=ac+bc$$
 или $c(a+b)=ca+cb$,

т.-е., чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое отдёльно и результаты сложить;

или чтобы умножить какое-нибудь число на сумму, достаточно умножить это число на каждое слагаемое отдёльно и результаты сложить.

Дъйствительно, на основании опредъления умножения и свойствъ перемъстительнаго п сочетательнаго можемъ написать:

$$(a+b)c = (a+b)+(a+b)+(a+b)+\dots$$
 (с разъ)
= $a+b+a+b+a+b+\dots$
= $(a+a+a+\dots)+(b+b+b+\dots)$
= $ac+bc$.

62. Степень. Произведение нъсколькихъ одинаковыхъ сомножителей называется степенью, при чемъ про-

изведеніе двухъ одинаковыхъ сомножителей называется второй степенью, произведеніе трехъ одинаковыхъ сомножителей называется третьей степенью, и т. д.

Такъ, произведеніе 5.5, т.-е. 25, есть вторая степень 5-и, произведеніе 3.3.3, т.-е. 27, есть третья степень 3-хъ, произведеніе 2.2.2.2, т.-е. 16, есть четвертая степень 2-хъ.

Степени выражають сокращенно такъ:

- 2.2.2=23 (2 въ 3-й степени),
- 3.3.3.3=34 (3 въ 4-й степени) и т. п.,

т.-е. ипшуть число, которое берется сомножителемь, и надписывають надъ нимъ съ правой стороны другое число, показывающее, сколько въ степени одинаковыхъ сомножителей; это второе число называется поназателемъ степени.

VIII. Дъленіе.

Задача 1. Роздано 24 листа бумаги поровну 6-ти ученикамъ. Сколько листовъ получиль каждый ученикъ? Для рѣшенія задачи надо разложить 24 листа на 6 равныхъ частей. Предположимъ, что въ каждой части будетъ по 2 листа; тогда всѣ 6 частей составили бы 2×6, т.-е. 12 листовъ, что меньше 24-хъ; предположимъ, что въ каждой части будетъ по 3 листа; тогда число, которое разлагается на части, было бы 3×6, т.-е. 18, что все-таки меньше 24-хъ. Допустимъ, что въ каждой части окажется 4 листа; тогда въ 6-ти частяхъ будеть 4×6, т.-е. ровно 24 листа. Значитъ, каждый ученикъ получитъ по 4 листа.

Мы видимъ, что въ этой задачѣ требуется найти такое число, которое надо умножить на 6, чтобы получить 24; другими словами, въ задачѣ требуется по данному произведенію 24 и множителю 6 отыскать множимое.

Задача 2. Роздано ученикамъ 24 листа бумаги по 6 листовъ каждому. Сколько учениковъ получили бумагу?

Для рѣшенія задачи надо узнать, сколько разь оть 24 листовь можно отнимать но 6 листовь, или, другими словами, сколько разь въ 24 (листахь) содержатся 6 (листовь). Предположимь, что только 2 раза; тогда все число листовь было бы 6×2 , т.-е. 12, что меньше 24-хь. Предположимь, что 6 листовь содержатся 3 раза; тогда всёхь листовь было бы 6×3 , т.-е. 18, что все-таки меньше 24. Допустимь, что 6 листовь содержатся 4 раза; тогда, вс4 листовь было бы 4 листовь содержатся 4 раза; тогда, 4 листовь содержатся 4 раза, и потому по 4 листовь получили 4 ученика.

Въ этой задачь требуется найти число, на которое надо умножить 6, чтобы получить 24; здъсь по данному произведению 24 и данному множимому 6 требуется найти множителя.

63. Что такое дѣленіе. Ариеметическое дѣйствіе, посредствомъ которато по данному произведенію и одному изъ сомножитель отыскивается другой сомножитель, наз. дѣлсніемъ. Такъ, раздѣлить 24 па 6 значить узнать: какое число слѣдуетъ учножить на 6, чтобы получить въ пронзведеніи 24 (другими словами: требуется найти шестую часть 24-хъ); или на какое число слѣдуетъ умножить 6, чтобы получить въ произведеніи 24 (другими словами, требуется уснать, сколько разъ 6 содержится въ 24-хъ).

При дъленіи данное произведеніе паз. дълимымъ, данный сомножитель—дълителемъ, а искомый сомножитель—частнымъ. Такъ, въ приведенномъ примъръ 24 есть дълимое, 6—дълитель, а искомое число, т.-е. 4—частное.

Дѣленіе обозначаєтся знакомъ:, который ставять между дѣлимымъ и дѣлителемъ, при чемъ дѣлимое иншется налѣво, а дѣлитель—направо отъ этого знака; напр., 24:6. Какъ знакъ дѣленія, употребляется также и черта, при чемъ дѣлимое иншутъ надъ чертою, а дѣлителя подъ ней; напр.: $\frac{24}{6}$.

Дъленіе есть дъйствіе, обратнов умноженію, потому что при дъленіи дается то, что отыскивается при умноженіи (т.-е. произведеніе), а отыскивается одно поъ тъхъ чиселъ, которыя даются при умноженіи (множимое или множитель).

64. Важное свойство частнаго. Величина частнаго не зависить оть того, означаеть ли оно множимое или множителя. Пусть, напр., дёлимое будеть 24, а дёлитель 6. Искомое частное можеть означать или множимое, или множителя. Въ первомъ случав оно означаеть такое число, которое надо умпожить на 6, чтобы получить 24. Во второмъ случав оно означаеть такое число, на которое надо умножить 6, чтобы получить 24. Такъ какъ произведеніе не измёняется, когда мы миожимое и множителя помёняемъ мёстами, то въ обопхъ случаяхъ искомое число должно быть одно и то же, именно 4, такъ какъ: если 4×6=24, то и 6×4=24.

Такимъ образомъ, узнаёмъ ли мы шестую часть 24-хъ, или узнаёмъ, сколько разъ 6 содержится въ 24, въ обоихъ случаяхъ получаемъ одно и то же число 4.

65. Дѣленіе съ остаткомъ. Пусть требуется раздѣлить 27 на 6. Пробуя умножать число 6 на 1, 2, 3, 4, 5..., мы замѣчаемъ, что ни одно изъ произведеній не равио 27. Значить, предложенное дѣленіе нельзя выполнить. Однако, мы условимся говорить: «раздѣлить 27 на 6», разумѣя при этомъ, чтобы было раздѣлено или все дѣлимое, если это возможно, или же наибольшая часть дѣлимаго, какая только можеть раздѣлиться на дѣлителя. Такъ, наибольшая часть 27-и, дѣлящанся на 6, есть 24; это число и требуется раздѣлить, когда говорять: «раздѣлить 27 на 6».

При такомъ дѣленіи можеть получиться остатонъ, т.-е. избытокъ дѣлимаго надъ тою его частью, которая дѣлится. Такъ, дѣля 27 на 6, мы получаемъ въ остаткѣ число 3. Очевидно, остатокъ всегда меньше дѣлителя.

Когда деленіе происходить съ остаткомъ, то получившееся при этомъ частное наз. приближеннымъ частнымъ. Такъ, дъля 27 на 6, мы получаемъ приближенное частное 4. Дъйствіе можно обозначить такъ:

27:6=4 (oct. 3),

помъщая въ скобкахъ остатокъ отъ дъленія.

Конечно, приближенное частное тоже имъетъ дволкое значеніе, смотря по тому, означаеть ли оно множимое нии множителя. Такъ, дъленіе 27:6=4 (ост. 3) означаеть: или, что, раздёливь 27 на 6 равныхъ частей, мы получимъ въ каждой части по 4 единицы, при чемъ 3 ед. останутся не раздёленными; или, что въ 27 число 6 содержится 4 раза, при чемъ еще остаются 3 единицы.

Въ отличие отъ приближеннаго то частное, которое получается тогда, когда дёленіе совершается безъ остатка, наз. точнымъ частнымъ. Впрочемъ, для сокращенія річи точное частное и приближенное мы будемъ просто называть частнымъ.

Когда деленіе совершается съ остаткомъ, то делимое равно произведенію ділителя на частное плюсь остатокъ.

Такъ, если 84:10=8 (ост. 4), то $84=10\times8+4$.

Дъйствительно, когда мы умножимъ приближенное частное на дёлителя, то получимъ ту часть дёлимаго, которая была раздёлена; если же приложимъ къ этому произведенію остатокъ, то получимъ все дълимое.

Когда дъленіе совершается безъ остатка, то дълимов равно произведенію дълителя на частное.

- 66. Когда употребляется пъленіе. При ръшенін задачь деленіе употребляется въ следующихъ 4-хъ случаяхъ:
- 1) Когда надо узнать, скольно разъ меньшее число содержится въ большемъ. Такъ, чтобы опредълить. сколько разъ 8 руб. содержатся въ 48 руб., достаточно найти, на какое число слъдуеть умножить 8 руб., чтобы

получить 48 руб.; здёсь по произведенію 48 и множимому 8 требуется отыскать множителя; а это узпается дёленіемь (8 руб. въ 48 руб. содержится 6 разь).

- 2) Когда надо узнать, во снолько разъ одно число больше или меньше другого числа, потому что узнать это—значить опредълить, сколько разъ большее число содержить въ себъ меньшее. Такъ, узнать, во сколько разъ 63 больше 9 (или во сколько разъ 9 меньше 63) значить опредълить, сколько разъ 63 содержить въ себъ 9. Поэтому, этотъ случай въ сущности представляетъ собою случай 1-й, но только онъ выраженъ другими словами.
- 3) Когда требуется какое-нибудь число разложить на нъскольно равныхъ частей. Пусть, напр., требуется разложить 60 на 12 равныхъ частей. Для этого достаточно опредълить, какое число надо умножить на 12, чтобы получить 60; здъсь по произведенію 60 и множителю 12 требуется отыскать множимое; а это узнается дъленіемъ (искомая часть равна 5).
- 4) Когда требуется накое-нибудь число уменьшить въ нѣсколько разъ, потому что уменьшить, напр., 60 въ 12 разъ значить разложить 60 на 12 равныхъ частей и виѣсто 60-и взять одну часть. Такимъ образомъ, этотъ случай представляетъ собою тотъ же случай 3-й, но выраженный иными словами.

Итакъ, можно съ зать, что дѣленіе употрэбляется только въ двухъ случаяхъ: 1) когда требуется узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, и 2) когда данное число требуется разложить на нѣсколько равныхъ частей.

67. Наименованіе единицъ дѣлимаго, дѣлителя и частнаго. Когда дѣленіемъ узнается, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, то дѣлимое и дѣлитель (а также и остатокъ, если онъ есть) могуть означать какія угодло единицы, но только од ного и того же наименованія; при этомь частное показываеть, сполько разь дёлитель содержится въ дёлимомь, и потому его можно разсматривать, какъ число отвлеченное; нагр., въ 50 рублякъ (дёлимое) 8 рублей (дёлитель) содержатся 6 разь (частное), при чемъ 2 рубля получаются въ остатить.

Когда же делениемь узнается часть делимаго, то делитель разсматривается, какы число отвлеченное, показыгающее, на сколько равныхъ частей разлагается делимое; делимое же п частное (а также и остатокъ, если опъ есть) могуть выражать какія угодно единицы, но только одного и того же наименованія; напр., раздёливь 62 пера на 12 (равныхъ частей), получимь 5 перьсеть и остатокъ 2 пера.

Обыкновенно при обозначении дъйствия не пишуть названий единиць, а только подразумъвають.

- 68. Дѣленіе можно выполнить посредствомъ сложенія, вычитанія и умноженія. Пусть требустся раздѣлить 212 на 53. Искомое частное мы можемъ найти:
 - 1) Сложеніемъ: 53+53=106; 106+53=159; 159+63=212.

Оказывается, что 53 надо повторить слагаемымь 4 раза, чтобы получить 212; значить, искомое частное есть 4.

2) Вычитаніемъ:

Оказывается, что 53 оть 212 можно отлимать 4 раза; вначить, искомое частное есть 4.

3) Умноженіемъ: $53 \times 2 = 106$; $53 \times 3 = 159$; $53 \times 4 = 212$. Искомый сомножитель, т.-е. частное, есть 4.

Однако эти способы неудобны, если частное большее число; арпечетика указываеть болье простой прісмъ, который мы теперь и разслотримъ.

69. Какъ узнать, будеть ли частное однозначное или многозначное. Легко узнать, будеть ли частное менте или болте 10-и. Для этого стоить только умножить (въ умт.) дёлителя на 10 и сравнить полученное произведение съ дёлимымъ.

Примъръ 1. 534:37=?

Если 37 умножимъ на 10, то получинъ 370; дълимое больше 370; значить, оно больше дълителя, повтореннаго 10 разъ, и потому частное должно быть 10 или больше 10, т.-е. оно выражается по меньшей мъръ 2-мя цыфрами 'есть число миогозначное).

Примъръ 2. 534:68=?

Если 68 умножнить на 10, то получимь 680; дълписе меньше 680; значить, частное должно быть менъе 10, т.-е. эно выражается одною цыфрою (сть число однозначное).

Покажемь сначала, какь находится частное однозначное, а затъмъ и многозначное.

- 70. Нахожденіе однозначнаго частнаго. Разсмотримъ два случая: когда дёлитель тоже однозначный и когда дёлитель многозначный.
- 1) При однозначномъ дълителъ однозначное частное нахедится по таблицъ умноженія. Напр., частное 56:8 равно 7, потому что, перебирая по таблицъ умноженія различныя произведенія числа 8, находимъ, что семью 8 какъ разъ 56; оть дъленія 42:9 получастся петочное частное 4, такъ какъ четырежды 9 равно 36, что меньше 42, а пятью 9 составляеть 45, что больше 42; значить, въ частномъ надовзять 4, при чемъ въ остаткъ получится 6.
 - 2) При многозначномъ дълителъ однозначное частное на-

ходится посредствомъ испытанія одной или нѣсколькихъ цыфръ.

Прим в ръ. 43380:6887.

Зачеринемъ въ дёлитель всь цыфры, кромъ первой слѣва, т.-е. возьмемъ изъ дълителя только 6 тысячъ. Въ дълимомъ зачеркнемъ справа столько же цыфръ, сколько ихъ зачеркнули въ дёлитель, т.-е. возьмемъ изъ дълимаго только 43 тысячи. Теперь зададимся вопросомъ, на какую цыфру надо умножить 6. чтобы получить 43 или число, близкое къ 43? Изъ таблицы умноженія находимъ, что если 6 умножимъ на 7, то получимъ 42, а если 6 умножимъ на 8, то окажется 48. Значитъ искомое частное не можеть быть больше 7; но оно можеть быть 7 или меньше 7 (меньше 7-ми оно окажется тогда, когда отброшенныя нами въ дълителъ 837 ед., будучи умножены на 7, составять такое число, которое превзойдеть 1 тысячу, оставшуюся оть 43 тысячь дёлимаго, вмёстё сь 530 единицами). Начнемъ испытаніе съ цыфры 7. Для этого умножимъ дълителя на 7:

6837	6837	4 3530
\times 7	× 6	41022
47859	41022	2508

Произведеніе оказалось больше дѣлимаго; значить, цыфра 7 не годится. Испытаемъ слѣдующую меньшую цыфру 6. Для этого умножимъ дѣлителя на 6. Произведеніе оказалось меньше 43530; значить, частное должно быть 6, при чемъ получается остатокъ 2508.

71. Замѣчаніе. Первую цыфру для испытанія можно наяти иначе. Возьмемь тоть же примъръ:

43530:6837

Замътивъ, что дълитель очень мало отличается отъ 7 тысячъ, узнаемъ, на какую цыфру надо умножить не 6,

а 7, чтобы получить число, близкое къ 43. По таблицѣ умноженія находимъ, что шестью 7... 42, а семью 7... 49. Слѣд., если бы дѣлитель былъ 7000, то цыфра частнаго была бы 6. Но дѣлитель меньше 7000; значить, цыфра частнаго можетъ быть и больше 6. Начнемъ испытаніе съ цыфры 6. Для этого умножимъ дѣлителя на 6 и вычтемъ произведеніе изъ дѣлимаго; если останется больше дѣлителя, то цыфра 6 мала, и тогда надо испытать цыфру 7; а если останется меньше дѣлителя, то цыфра 6 годится. Остатокъ (2508) оказался меньше дѣлителя; значитъ, цыфра 6 годится.

Такъ полезно поступать тогда, когда вторая цыфра дълителя больше 5. Напр., дълитель 6837, благодаря тому, что у него вторая цыфра больше 5, ближе подходить къ 7000, чъмъ къ 6000.

72. Нахожденіе многозначнаго частнаго. При объясненіи способа нахожденія многозначнаго частнаго мы будемъ предполагать, что дѣлитель означаеть множимое, а искомое частное означаеть множителя, т.-е. что дѣленіемъ мы узнаемъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.

Примъръ. 64528:23=?

Отдълимъ дълителя отъ дълимаго вертикальною чертою; подъ дълителемъ проведемъ горизонтальную черту; подъ этою чертою будемъ писать цыфры частнаго по мъръ ихъ нахожденія.

64528 | 23 Опредълимъ сначала, какои высшій раз- 46 | 1 | 2804 рядъ будеть въ частномъ.

Въ дълимомъ высши разрядъ — десятки тысячъ, а потому прежде всего узнаемъ, не будутъ ли и въ частномъ десятки тысячъ? Десятковъ тысячъ въ частномъ не будетъ, потому что число 23, повторенное 10000 разъ, составляетъ 23 десятка тысячъ.

а въ дёлимомъ только 6 десятковъ тысячъ. Будуть ли въ частномъ тысячи? Число 23, повторенное 1000 разъ, составляетъ 23 тысячи; въ нашемъ дёлимомъ тысячъ болѣе 23; значитъ, въ немъ число 23 содержится болѣе 1000 расъ, и потому въ частномъ будутъ тысячн.

Чтобы увиать, сколько тысячь въ частномъ, примемъ во вниманіе, что 23 содержится 1000 разъ въ 23 тысячахъ; но 23 тысячи въ 64 тысячахъ повторяются

64528 23	2 рага; слъд., 23 въ 64 тысячахъ содер-
46 2804	жится 1000 да еще 1000 разъ, те. 2 тысячи
185	разъ. Ставимъ въ частномъ цыфру 2 и бу-
184	демъ помпить, что эта цыфра означаетъ
	тысяче.
128	Умножимъ 23 на 2 тысячи и вычтемъ
92	полученное число изъдълимаго. Чтобы ум-
36	пожить 23 на 2 тысячи, достаточно умно-
жить 23 га 2	н полученное число на тыслчу. Получимъ
46 тысячь. Под	-ыя и отакикай имаркэмт адоп 34 амэшип
чтемъ.	, .

Отъ 64 тысячъ остается 18 тысячъ, а отъ всего дѣлимаго должны остаться эти 18 тыс., да еще 528 един.; эначитъ, полный остатокъ будетъ 18528. Въ этомъ числѣ 23 не можетъ содержаться ни одной тысячи разъ, потому что оно менѣе 23 тысячъ.

Чтобы узнать, сколько сотепъ въ частномъ, возьмемъ въ помномъ остаткъ только 185 сотепъ (для чего снесемъ къ остатку отъ тысячъ слъдующую цыфру дълимаго 5) и приметъ во вниманіе, что 23 содержится 100 разъ въ 23 сотилхъ; но 23 сотин въ 185 сотняхъ повторяются 8 разъ; слъд., 23 въ 185 сотняхъ содержится 8 сотепь разъ. Пишемъ въ частномъ цыфру 8 направо отъ ранъе написанной цыфры 2, такъ какъ сотни ставятся направо отъ тысячъ. Умножимъ 23 на 8 сотепъ и вычтемъ полученное число, т.-е. 184 сотип, изъ 185 сотенъ. Отъ сотепъ останется одна сотия, а отъ всего дълимаго останется еще 28 ед.; зна-

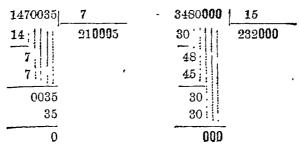
чить, полный остатокь будеть 123. Въ этомь остатий 23 не можеть содержаться ин одной сотии разъ, потому что 128 менте 23 сотенъ.

Чтобы узнать, сколько десятковъ въ частномъ, возьмечь въ нолномъ остаткъ только один десятки (для чего слесемъ къ остатку отъ сотенъ слъдующую цыфру дълимаго 2) и примемъ во вниманіе, что 23 содержится 10 разъ въ 23 десяткахъ; но 23 десятка въ 12 десяткахъ не содержится ни разу; слъд., 23 въ 12 десяткахъ не содержится ни одного десятка разъ; поэтому десятковъ въ частномъ не будетъ вовсе. Пишемъ въ частномъ цыфру о направо отъ прежде написанныхъ (потому что десятки пищутся направо отъ сотенъ) и сносимъ слъдующую цыфру дъянмаго 8, чтобы имъть полный остатокъ.

Остается узнать, сколько простыхъ единиць въ частномъ. 23 въ 128 содержатся 4 раза. Пишемъ въ частномъ цыфру 4 направо отъ прежде написанныхъ цыфръ, умножаемъ на нее 23 и вычитаемъ произведение изъ 128; тогда получимъ послъдний остатокъ 36.

Такъ какъ въ частномъ мы писали цыфры въ порядкъ, принятомъ нумераціей, то остается только прочесть число, написанное подъ чертою: 2804.

Воть еще 2 примъра дъленія:



73*. Другое объясненіе. Въ предыдущемъ параграфѣ мы объясняли нахожденіе частнаго, разематривая дѣленіе, какъ дѣлетвіе, которымъ узнается, сколько разъ дѣлитель содер-

жится въ дълимомъ. Но можно вести объяснение иначе, резсиатривая дъление, какъ разложение даннаго числа на равныя части. Объяснимъ это на томъ же примъръ:

64528:23

Это значить: разложить 64528 ед. на 23 равныя части (напр., раздълить 64528 рублей поровну между 23 человъками). По десятку тысячь въ каждой части не получится, но получится по несколько тысячь. Чтобы узнать, по скольку именно, возьмемь въ дёлимомъ 64 тысячи и разложимъ ихъ на 23 равныя части. Въ каждой части получится 2 тысячи. **Пишемъ** въ частномъ цыфру 2. Если въ каждой части 2 тысячи, то въ 23 частихъ ихъ будеть 46. Вычитаемъ 46 тыс. изъ 64 тысячь; остается 18 тысячь, которыя предстоить разложить на 23 равныя части. Очевидно, тысячи не получится. Раздробимъ 18 тысячь въ сотни и приложимъ къ нимъ 5 сотенъ делимаго, чтобы и ихъ заразъ разложить на 23 равныя части. Получимъ 185 сотенъ. Разложивъ ихъ на 23 равныя части, получимь въ каждой части по 8 сотенъ. Пишемъ въ частномъ цыфру 8 на мъстъ сотенъ. Умноживъ 8 на 23, узнаемъ, что во всёхъ частяхъ сотенъ будеть 184; вычитаемъ ихъ изъ 185. Остается 1 сотня, которую предстоить разложить на 23 равныя части. Раздробимъ ее въ десятки и къ нимъ прибавимъ) 2 десятка дёлимаго, чтобы заразь и ихъ разложить на 23 равныя части; получимъ 12 десятковъ. Отъ деленія ихъ на 23 равныя части въ частномъ не получимъ десятковъ; ставимь въ частномъ цыфру 0 на мъстъ десятковъ. Раздробимъ 12 десятновъ въ единицы и приложимъ 8 ед. дълимаго; получимъ 128 ед. Раздъливъ ихъ на 23. найдемъ 4 ед. Пишемъ цыфру 4 въ частномъ на мъстъ единицъ.

74. Правило дѣленія. Пишуть дѣлимое и дѣлителя въ одной горизонтальной строкѣ, отдѣливъ ихъ другь отъ друга вертикальною чертою. Подъ дѣлителемъ проводять горизонтальную черту, подъ которою пишутъ цыфры частнаго по мѣрѣ ихъ полученія.

Отдъляють въ дълимомъ отъ лъвой руки къ правой

столько цыфръ, чтобы изображаемое ими число содержало дълителя, но менъе 10 разъ.

Дёлять отдёленную часть дёлимаго на дёлителя (какъ было объяснено раньше).

Полученную цыфру ппшуть въ частномъ.

Умножають дълителя на найденную цыфру частнаю и произведение вычитають изъ отдъленной части дълимаго.

Къ остатку сносять слъдующую вправо цыфру дълимаго и полученное послъ снесенія число дълять на дълителя (какъ было объяснено раньше); цыфру отъ этого дъленія пишуть въ частномъ направо отъ ранъе написанной цыфры.

Умножлють дѣлителя на вторую цыфру частнаго и произведеніе вычитають изъ того числа, которое было раздѣлено для полученія второй цыфры частнаго.

Къ остатку сносять следующую цыфру делимаго и полученное после снесенія число делять на делителя.

Продолжають такъ дъйствіе до тъхъ поръ, пока въ дълимомъ не окажется пыфръ для снесенія.

Если въ остаткъ, послъ снесенія къ нему надлежащей пыфры дълимаго, получется число, меньшее дълителя, то пишутъ въ частномъ 0, а къ остатку сносять слъдующую цыфру дълимаго.

75. Сокращенный способъ дъленія. Когда дълитель однозначный, то для сокращенія письма полезно привыкнуть производить въ умъ всъ вычитанія, выписывая только остатки. Напр., такъ:

563087	6	или еще короче:
23 []	93847	563087 6
50 28		5 93847
47		гдъ цыфра 5 подъ чертою означаеть
5		послъдній остатокъ.

75*, а. Можно не писать вычитаемыхъ и при всякомъ дёле-

нін; при этомъ мучше всего вычитаніе производить такъ, какъ будеть объяснено на следующемъ примерть:

4830278	5648	Умножаемъ 5648 на 8 и производимъ
31187	855	вычитание изъ 48302 такъ: восенью
29478		8 64; 64 изъ 2 вычесть нельзя: при-
1238		бавляемъ къ 2 число 70; 64 изъ 72,
	•	остается 8; пищемъ 8 педъ цыфрою 2.

Замѣтивъ теперь, что мы увеличили уменьшаемое на 70 сотенъ, т.-е. на 7 тысячь, запомнимъ цыфру 7 съ тѣмъ, чтобы настольно же увеличить потомъ и вычитаемое; в о с е м ь ю 4... 32 да 7 (въ умѣ)... 39; 39 изъ 40... 1 (мы увеличили уменьшаемое на 40 тысячь, т.-е. на 4 дес. тысячъ); пишемъ 1 подъ цыфрою 0, а 4 запоминаемъ. В о с с м ь ю 6... 48 да 4 (въ умѣ) 52; 52 изъ 53... 1; пишемъ 1 подъ цыфрою 3, 5 запоминаемъ. В о с е м ь ю 5... 40, да 5... 45; 45 изъ 48... 3; пишемъ 3 подъ цыфрою 8. 1-й остатокъ есть 3118; сносимъ къ нему слъдующую цыфру дълимаго 7. Продолжаемъ дѣленіе такъ далѣе.

Подобное вычитание основывается на томъ, что остатокъ не измѣнится, если уменьшаемое и вычитаемое увеличимъ на одно и то же число. Каждый разъ къ уменьшаемому прибавляютъ столько единицъ слъдующаго высшаго разряда, сколько иужно для того, чтобы можно было вычесть произведение цыфры дѣлитсля на цыфру частнаго.

76. Случай, когда дълитель оканчивается нулями. Дъленіе упрощается въ томъ случав, когда дълитель оканчивается нулемъ или нъсколькими нулями. Возьмемъ сначала случай, когда дълитель есть е дини и а съ нулями. Раздълить какое-инбудь число на 10, на 100, на 1000 и т. д., значить, между прочимъ, узнать, сколько въ этомъ числъ заключается десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д. Но это легко узнается по правилу нумераціи, указапному нами ранъе (§ 14). Напр.:

54634:10=5463 (ocr. 4) 54634:1000=54 (ocr. 634)

Правило: Чтобы раздълить число на 1 съ нулями,

отдъляютъ въ дълимомъ справа столько цыфръ, сколько есть нулей въ дълителъ; тогда оставшіяся цыфры дълимаго представятъ собою частное, а отдъленныя—остатокъ.

Возьмемъ теперь случай, когда дёлитель есть како ен и будь число, оканчивающееся нулями; напр.:

389224	7300
365	53
242	
219	
2324	

Дълитель представляеть собою 73 сотии. Чтобы узнать, сколько разъ 73 сотии содержатся въ дълимомъ, разобъемъ его на двъ части: на сотии и единицы. Первая часть есть 3892 сотии, еторая часть — 24 единицы. 73 сотии могуть содержаться только въ одной изъ этихъ частей, именно въ сотияхъ. Чтобъ узнать, сколько разъ 73 сотии содержатся въ 8892 сотияхъ, надо 3892 раздълить на 73. Раздъливъ, находимъ, что 73 сотии въ 3892 сотияхъ содержатся 53 раза, при чемъ 23 сотии остаются. Приложивъ къ 23 сотиямъ 24 единицы дълимаго, получимъ 2324; въ этомъ числъ 73 сотии не содержатся ни разу; слъд., 2324 единицы будуть въ остаткъ.

Вотъ еще примъръ, въ которомъ и дълимое, и дълитель оканчиваются пулями:

Правило. Если дълитель оканчивается нулями, то зачершиваютъ въ немъ эти нули и въ дълимомъ зачеркиваютъ справа столько же цыфръ; оставшіяся числа дълятъ и нъ остатку снесятъ зачеркнутыя цыфры дълимаго.

77. Повърка дъленія. Дъленіе можно новърять умноженіемъ, основываясь на томъ, что дълемоє равно

дълителю, умноженному на частное (плюсъ остатокъ если онъ есть). Напр.:

Дѣленіе:	8375 <u>4</u> 42	Повърна:	199 × 42
	417		398
	378		796
	395		8358
	378		+ 17
	17		8375

Мы умножили частное 199 на дѣлителя 42 и къ полученному произведенію приложили остатокъ 17. Такъ какъ послѣ этого получилось число, равное дѣлимому, то весьма вѣроятно, что дѣйствіе сдѣлано вѣрно.

78. Какъ раздѣлить на произведеніе. Пусть требуется раздѣлить 60 на произведеніе 5 . 3, т.-е. на 15. Разъяснимъ, что для этого достаточно раздѣлить 60 на 5 и полученное частное раздѣлить еще на 3:

Дъйствительно, первымъ дъленіемъ мы, можно сказать, разлагаемъ 60 на 5 равныхъ частей, при чемъ въ каждой части получается 12; вторымъ дъленіемъ мы разлагаемъ 12 на три равныя части, причемъ въ каждой части получается по 4. Это можно наглядно изобразить такъ:

Отсюда видно, что послё двухъ этахъ дёленій число 60 оказывается разложеннымъ на 15 равныхъ частей.

Подобнымъ образомъ можемъ разъяснить, что для дѣленія числа 300 на произведеніе трехъ множителей 3.5.4, можно раздѣлить 300 на 3 (получимъ 100), затѣмъ это

частное раздёлить на 5 (получимъ 20) и, наконецъ, послёднее частное раздёлить на 4 (получимъ 5).

Правило. Чтобы раздълить какое-нибудь число на произведение, достаточно раздълить это число на перваго сомножителя, полученное частное раздълить на второго сомножителя, это частное—на третьяго и т. д. (предполагается при этомъ, что каждое дъление выполняется безъ остатка).

Этимъ правиломъ можно иногда пользоваться при устномъ дѣленіи; напр., чтобы раздѣлить 1840 на 20, мы принимаемъ во вниманіе, что 20=10.2 и дѣлимъ 1840 на 10 (получимъ 184) и найденное число на 2 (получимъ 92); подобно этому, чтобы раздѣлить какое-нибудь число на 8, т.-е. на произведеніе, равное 2.2.2, можно дѣлимое раздѣлить на 2, потомъ еще на 2 и еще на 2.

ІХ. Измъненіе произведенія и частнаго.

- 79. Измѣненіе произведенія при измѣненіи одного изъ данныхъ чиселъ. Разсмотримъ слѣдующіе 4 случая измѣненія произведенія.
- 1) Если увеличимъ (или уменьшимъ) множителя въ нъсколько разъ, то произведение увеличится (или уменьшится) во столько же разъ.

Такъ, если въ примъръ 15×3 мы увеличимъ множителя въ 2 раза:

$$15\times3$$
 15×6 ,

то п само произведение увеличится въ 2 раза, такъ какъ умножение 15 на 3 представляетъ собою нахождение суммы трехъ слагаемыхъ: 15+15+15, тогда какъ умножение 15-и на 6 есть нахождение суммы 6 такихъ же слагаемыхъ:

<u>15+15+15+15+15+15</u>, а эта сумма больше первой въ два раза.

2) Если увеличимъ (или уменьшимъ) множимое въ нъскольно разъ, то произведение увеличится (или уменьшится) во столько же разъ.

Такъ, если въ примъръ 15×3 мы увеличимъ множимое въ 4 раза, т.-е. возьмемъ 60×3, то и произведение увеличится въ 4 раза; дъйствительно, первое произведение представляетъ собою сумму трехъ слагаемыхъ: 15+15+15, и второе произведение представляетъ собою также сумму трехъ слагаемыхъ: 60+60+60, но каждое слагаемое второй суммы въ 4 раза болъе каждаго слагаемаго первой суммы; сначитъ, вторая сумма въ 4 раза больше первой суммы.

3) Если одного изъ сомножителей увеличимъ (или уменьшимъ) на какое-нибудь число, то произведение увеличится (или уменьшится) на это число, умноженное на другого сомножителя.

Такъ, если въ примъръ 8×3=24 увеличимъ множитеня на 2, т.-е. 8 будемъ умножать не на 3, а на 5, то тогда 8 повторится слагаемымъ не 3 раза, а 5 разъ; значитъ, произведение будетъ больше прежняго на 8+8, т.-е. на 8.2, или на 16 (оно равно теперь 40).

Если въ томъ же примъръ увеличимъ множимое, положимъ, на 5, т.-е. будемъ умножать не 8 на 3, а 13 на 3, то въ произведение взойдутъ теперь 5 новыхъ единицъ, повторенныя 3 раза; значитъ, произведение увеличится противъ прежняго на 5 . 3, т.-е. на 15 (оно равно теперь 39)*).

$$(aq)b = (ab)q$$
 $u \quad a(bq) = (ab)q$.

Изъ распредълительнаго свойства слъдуетъ что

$$(a+q)b=ab+qb$$
 is $a(b+q)=ab+aq$.

^{*)} δ казанныя изувнення составляють следствия сочетательнаго и распределительнаго свойствы произведения (§ 61,a). Действительно, изъ перваго свойства следуеть, что

Значить, если увеличимь одного изъ сомножителей въ q разъ, то и произведение увеличится въ q разъ.

Значить, если увеличимъ одного изъ сомножителей на число q, то произведение увеличится на это число, умноженное на другого сомножителя.

80. Упрощеніе умноженія въ нѣкоторыхъ случаяхъ. Зная эти пзмѣненія пропзведенія, мы можемъ нногда упростить умноженіе.Пусть, напр., надо умножнть 438 на 5. Умпожнвъ 438 на 10, получимъ 4380; такъ какъ 5 меньше 10 въ 2 раза, то пропзведеніе 438×5 должно быть вдвое меньше 4380, т.-е. оно равно 2190.

Подобно этому, ссли требуется умножить какое-нибудь число, напр. 32, на 25, мы можемъ умножить это число на 100 (получимъ 3200) и полученное произведение уменьшить въ 4 раза (получимъ 800).

Пусть еще требуется умножить 523 на 999. Дополнимь множителя до 1000, т.-е. увеличимь его на 1. Тогда получимь произведение 523. 1000, которое паходится сразу: 523000. Это число болъе искомаго на 523; значить, искомое произведение получится, если изъ 523000 вычтемъ 523 (получимъ 522477).

- 81. Измѣненіе произведенія при измѣненіи обоихъ данныхъ чиселъ. Если оба сомножителя измѣняются одновременно, то произведеніе иногда увеличится, иногда уменьшится, или же останется безъ перемѣны. Чтобы опредѣлить зарапѣе, что сдѣлается съ произведеніемъ отъ одновременнаго измѣненія обоихъ сомножителей, слѣдуетъ предположить, что сначала измѣнено только одно множимое, а потомъ и мпожитель. Разъяснимъ это на примърѣ: 15×6=90.
 - 1) Увеличимъ множимое въ 3 раза и множителя въ 2 раза: 15×6=90; 45×12=?

Оть увеличенія одного множимаго въ 3 раза произведеніє увеличится въ 3 раза, т.-е. будеть не 90, а 90+90+90. Оть увеличенія затёмъ множителя въ 2 раза произведеніе еще увеличится въ 2 раза; значить, оно теперь будеть:

$$(90+90+90)+(90+90+90),$$

т.-е. сравнительно съ начальнымъ произведениемъ опо увеличится въ дважды три раза (въ 6 разъ).

2) еньшимъ множимое въ 3 раза и множителя въ 2 раза:

$$15 \times 6 = 90; 5 \times 3 = ?$$

Отъ уменьшенія одного множимаго въ 3 раза произведеніе уменьшится въ 3 раза, т.-е. вмѣсто ,90 сдѣлается 30; отъ уменьшенія затѣмъ множителя въ 2 раза произведеніе еще уменьшится въ 2 раза, т.-е. сдѣлается вмѣсто 30-и 15. Значить отъ этихъ двухъ измѣненій произведеніе уменьшится въ дважды три раза, т.-е. въ 6 разъ.

3) Увеличимъ множимое въ 6 разъ, а множителя уменьшимъ въ 2 раза:

$$15 \times 6 = 90; 90 \times 3 = ?$$

Оть увеличенія одного множимаго въ 6 разь произведеніе увеличится въ 6 разь, а оть уменьшенія затёмъ множителя въ 2 раза это увеличенное въ 6 разь произведеніе уменьшится въ 2 раза. Значить, послё двухъ этихъ измёненій произведеніе увеличится только въ 3 раза (въ 6:2 раза).

4) Если одинъ сомножитель увеличится, а другой уменьшится въ одинаковое число разъ, то произведение не измѣнится, потому что отъ увеличения одного сомножителя произведение увеличится, а отъ уменьшения другого сомножителя оно уменьшится во столько же разъ. Напр.:

$$15 \times 6 = 90$$
; $30 \times 3 = 90$; $5 \times 18 = 90$.

- 82. Измъненіе частнаго при измъненіи одного изъ данныхъ чиселъ. Когда дъленіе совершается безъ остатка, то при измъненіи дълимаго и дълителя частное измъняется слъдующимъ образомъ:
- 1) Если увеличимъ (или уменьшимъ) дѣлимое въ нѣсколько разъ, то частное увеличится (или уменьшится) во столько же разъ, потому что, увеличивая дѣлимое и оставляя дѣлителя безъ перемѣны, мы увеличиваемъ произведеніе и оставляемъ одного сомножителя безъ перемѣны; а это

возможно только тогда, когда другой сомножитель (т.-е. частное) увеличится во столько же разъ. Напр.:

10:2=5; 20:2=10; 30:2=15 и т. п.

2) Если увеличимъ (или уменьшимъ) дѣлителя въ нѣсколько разъ, то частное уменьшится (или увеличится) во столько же разъ, потому что, когда увеличенъ одинъ сомножитель (дѣлитель), произведеніе (дѣлимое) останется безъ перемѣны только тогда, когда другой сомножитель частное) уменьшится во столько же разъ. Напр.:

48:2=24; 48:4=12; 48:6=8 п т. п.

Замѣчаніе. Когда при дѣленіи получается остатокъ, то эти выводы не всегда бывають вѣрны. Напр.:

29:6=4 (oct. 5) 29:3=9 (oct. 2).

83. Измѣненіе частнаго при измѣненіи обоихъ данныхъ чиселъ. Когда дѣлимое и дѣлитель измѣняются одновременно, то частное иногда увеличится, иногда уменьшится, или же останется безъ измѣненія. Такъ, если въ примѣрѣ 27:3=9 увеличимъ дѣлимое въ 2 раза и дѣлители увеличимъ въ 6 разъ, то частное уменьшится въ 3 раза: 54:18=3.

Слъдуетъ обратить особенное внимание на ть случан, когда частное остается безъ измънения:

Если дѣлимое и дѣлителя увеличимъ (или уменьшимъ) въ одинаковое число разъ, то частное не измѣнится, потому что отъ увеличенія (или уменьшенія) дѣлимаго частное увеличивается (или уменьшается), а отъ увеличенія (или уменьшенія) дѣлителя оно уменьшается (или увеличивается) въ одинаковое число разъ.

Такъ, если въ примъръ 60:15=4 увеличимъ дълимое и дълителя въ 5 разъ, то получимъ: 300:75=4; если въ томъ же примъръ уменьшимъ дълимое и дълителя въ 5 разъ, то получимъ 12:3=4.

отдълъ второй.

Именованныя цѣлыя числа.

І. Понятіе объ измфреніи величинъ.

84. Понятіе о величинѣ. Все то, что можетѣ быть равно, больше пли меньше, наз. величиною. Такъ вѣсъ предметовъ есть величина, потому что вѣсъ одного предмета можетъ быть равенъ вѣсу другого предмета и можетъ быть больше или меньше вѣса другого предмета.

Вотъ величны, наиболъе знакомыя каждому изъ насъ: длина (называемая иногда шириною, иногда высотою, толщиною...);

поверхность, т.-е. то, что ограничиваеть предметь съ разныхъ сторонъ;

объемъ, т.-е. часть пространства, занимаемая предметомъ; въсъ, т.-е. давленіе, производимое предметомъ на горизонтальную подпору;

время, въ теченіе котораго совершается какое-либо явлепіе или дъйствіе;

цена товара и многія другія величины.

Замътимъ, что илоская поверхность какого-нибудь предмета (напр., поверхность стола, пола и т. п.) называется обыкновенно площадью; внутренній объемъ какого-либо сосуда или япика наз. виъстимостью или емкостью.

85. Значеніе величины. Каждая величина можеть пить множество значеній, отличающихся одно оть другого только темь, что одно значеніе больше,

другое—меньше. Напр., величина, называемая длиной, въ разныхъ предметахъ вообще имъетъ различныя значенія; такъ, у листа бумаги длина иная, чъмъ у комнаты, у линейки и пр. Иногда можетъ случиться, что у двухъ предметовъ длина окажется совершенно одинаковой; тогда говорятъ, что у этихъ предметовъ длина имъетъ одно и то же значеніе.

86. Измъреніе величины. Положимъ, что мы котимъ составить себъ ясное понятіе о длинъ какой-нибудь комнаты; тогда мы измъряемъ ее при помощи другой длины, которая намъ хорошо извъстна, напр., при помощи аршина. Для этого откладываемъ аршинъ по длинъ нашей комнаты столько разъ, сколько можно. Если аршинъ уложится по длинъ комнаты ровно 10 разъ, то длина ея равна 10 аршинамъ. Подобно этому, чтобы пзмърить въсъ какого-либо предмета, мы беремъ другой въсъ, который намъ хорошо извъстенъ, напр., фунтъ, и узнаемъ (помощью въсовъ), сколько разъ фунтъ содержится въ измъряемомъ значеніи въса. Пусть онъ содержится ровно 5 разъ; тогда въсъ предмета равенъ 5 фунтамъ.

Извъстное намъ значеніє величины, употребляемое для измъренія другихъ значеній той же величины, наз. единицею этой величины. Такъ, аршинъ есть единица длины, фунть—единица въса, и т. п.

Для каждой величины обыкновенно выбирають нѣсколько единиць, однъ болъе крупныя, другія болъе мелкія. Такъ, для измъренія длины, кромъ аршина, употребляють еще: сажень, версту, вершокъ, футь и другія. Если, напр., въ длинъ комнаты аршинъ содержится не ровно 10 разъ, а съ иъкоторымъ остаткомъ, который меньше аршина, то этотъ остатокъ измъряють при помощи болъе мелкой единицы, напр. вершкомъ. Если случится, что въ остаткъ вершокъ уложится 7 разъ, то длина комнаты равна 10 аршинамъ 7 вершкамъ.

Вообще, измѣрить каков-либо значеніе величины значить выразить его при помощи одной или нѣсколькихъединицъ этой величины.

87. Мъры. Въ каждомъ государствъ правительство установило опредъленныя единицы для главнъйшихъ величинъ. Сдъланы образцовыя единицы: образцовый аршинъ, образцовый фунтъ и т. п., по которымъ приготовляютъ единицы для обиходнаго употребленія. Единицы, вошедшія въ употребленіе, называются мърами.

По сравненію одна съ другой однородныя мѣры (т.-е. мѣры одной и той же величины), бывають высшаго и низшаго разрядовъ. Такъ, сажень есть мѣра высшаго разряда по сравненію съ аршиномъ и низшаго разряда по сравненію съ верстой.

Единичнымъ отношеніемъ (или просто отношеніемъ) двухъ однородныхъ мъръ называется число, показывающее, сколько разъ меньшая мъра содержится въ большей. Такъ, отношеніе сажени къ аршину есть число 3.

Разсмотримъ главиващія міры, употребляемыя у насъ, въ Россіи.

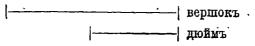
88. Мъры длины (или разстояній). Мъры длины (называемыя иначе линейными мърами, потому что онъ служать для измъренія длины линій) слъдующія:

```
миля = 7 верстамъ, сажень = 7 футамъ, верста = 500 саженямъ, сажень = 3 аршинамъ, аршинъ = 16 вершкамъ,
```

Такъ какъ аршинъ втрое меньше сажени, а сажень содержитъ 84 дюйма (12×7) , то

1 арш.=28 дюймамъ.

Прилагаемъ вдёсь для нагляднаго сравненія двё мёры:

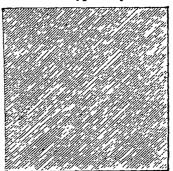


-89. Мъры площадей. Для измъренія площадей употребляются мъры, называемыя квадратными, такъ какъ онъ имъютъ форму квадрата. Квадратомъ называется такой четыреугольникъ, у котораго всъ 4 стороны равны и всъ 4 угла одинаковы. Квадратный дюймъ есть квадратъ, у котораго каждая сторона равна линейному дюйму; квадратный вершокъ есть квадратъ, у котораго каждая сторона равна линейному вершку, и т. д.

Для наглядности квадр. дюймъ и квадр. вершокъ изображены у насъ на чертежѣ въ натуральную всличину:







Квадр, вершокъ

Отношеніе двухъ квадр. мѣръ какихъ-либо названій равно отношенію двухъ линейныхъ мѣръ тѣхъ же названій, помноженному само на себя. Такъ, отношеніе квадр.

сажени къ квадр. аршину
равно произведенію 3×3,
г.е.числу 9. Для объясненія
этого вообразимъ два квадрата такихъ, чтобы у одного сторона была въ аршинъ,
а у другого — въ сажень;
тогда меньшій квадратъ будеть квадратный аршинъ,

а большій—квадратная сажень (этп два квадрата въ уменьшенномъ видъ изображены у насъ на чертежъ). Если разджимы большій квадрать на 3 равныя полосы, то наждая полоса, имін ширину 1 арш., а длину въ 3 аршина, будеть содержать, очевидио, 3 малыхы квадрата; значить, большій квадрать будеть содержать ихъ 3 раза по 3 или 9.

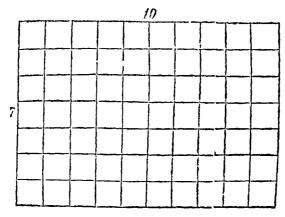
Такимъ образомъ составляется слЪдующая

таблица ивадр. мъръ:

квадр. миля=49 кв. верст. $(7 \times 7 = 49)$

- » верста=250000 кв. саж. ($500 \times 500 = 250000$)
- » сажень=9 кв. арш. (3×3=9)
- » сажень=49 кв. фут. (7×7=49)
- » аршинъ=256 кв. вершк. (16×16=256)
- » футь=144 кв. дюйма (12×12=144)
- » дюймь=100 кв. линій (10×10=100)

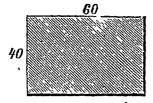
20. Измъреніе нъкоторыхъ площадей. Если площадь имъеть форму четыреугольника съ одинаковыми углами (форму и рямо угольника), то ее легко измърить. Пусть, напр., требуется узнать, сколько квадратных аршинъ заключается въ площади пола компаты.

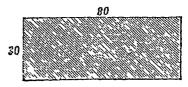


Для этого достаточно смѣрить линсйнымъ аршиномъ длину и ширпиу комнаты и полученныя числа перемножить. Пусть., напр., длина комнаты равна 10 аршинамъ, а ширина—7 аршинамъ. Раздѣлимъ длину пола на 10, а ширину

на 7 равныхъ частей, а затъмъ проведемъ линіи, какъ указано на чертежъ; тогда площадь пола раздълится на кв аршины, которыхъ будетъ 7 рядовъ по 10, т.-е. $10 \times 7 = 70$.

91. Десятина. Для измъренія поверхности полей употребляется десятина; это—площадь, содержащая во

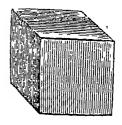




себъ 2400 кв. саженъ, и равная, слъд., площади прямоугольника, имъющаго въ длину 60 саж., а въ ширину 40 саж., или въ длину 80 саж., а въ ширину 30 саж. (умноживъ 60 на 40 или 80 на 30, получимъ одно и то же число 2400).

92. Мъры объемовъ. Для измъренія объемовъ употребляются мъры, называемыя кубическими, такъ какъ онъ имъютъ форму куба. Кубомъ наз. объемъ, ограниченный

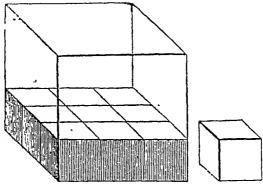
со всёхъ сторонъ 6-ью одинаковыми квадратами. Каждый квадрать называется стороною куба; линіи, по которымъ пересёкаются двё смежныя стороны, называются ребрами куба. Всё ребра куба имёють одинаковую длину. Кубъ, у котораго каждое ре-



бро въ дюймъ, пазывается кубическимъ дюймомъ; кубическимъ футомъ пазыв. такой кубъ, у котораго каждов ребро равно линейному футу, и т. п.

Отношеніе двухъ кубическихъ мѣръ какихъ-либо названій равно отношенію двухъ линейныхъ мѣръ тѣхъ же названій, взятому сомножителемъ 3 раза. Такъ, отношеніе куб. сажени къ куб. аршину равно произведенію 3.3.3, т.-е. числу 27. Для объясненія этого представимъ себѣ такіе 2 куба, чтобы у одного ребро было въ аршинъ, а у

другого—въ сажень; тогда меньшій кубъ будеть куб. аршинь, а большій—куб. сажень (такіе два куба мы изобразили на чертежь въ уменьшенномъ видь). Очевидно,



что на днѣ бо́льшаго куба установится 9 меньшихъ кубовъ (потому что дно бо́льшаго куба содержить въ себѣ 9 квадр. аршинъ). Но высота бо́льшаго куба равна сажени, а высота меньшаго куба равна аршину; поэтому на первый слой малыхъ кубовъ можно будетъ еще положитъ 2 слоя, и тогда выйдетъ 3 слоя по 9 кубовъ; значитъ, всего кубическихъ аршинъ въ кубической сажени 3.3.3, т.-е. 27.

Такимъ образомъ составляется слёдующая

таблица кубическихъ мъръ:

куб. миля=343 куб. верст. $(7 \times 7 \times 7)$

- » верста=125000000 куб. саж. $(500 \times 500 \times 500)$
- » сажень=27 куб. арт. (3×3×3)
- ➤ сажень=343 куб. футамъ (7×7×7)
- » аршинъ=4096 куб. вершк. (16×16×16)
 - » футь=1728 куб. дюйм. (12×12×12)
- » дюймъ=1000 куб. линіямъ (10×10×10)

Для измёренія объемовъ жидкихъ тёль, какъ основная мёра, употребляется—ведро, имёющее объемъ, равный приблизительно 750 куб. дюймамъ; въ этомъ объемъ помёщается 30 фунтовъ чистой воды *).

^{*)} При температурѣ 162/3° Цельсія.

Кромѣ того употребительны:

бочка=40 вед., ведро=10 штофамъ, штофъ=2 полуштофамъ, полуштофъ=5 чаркамъ.

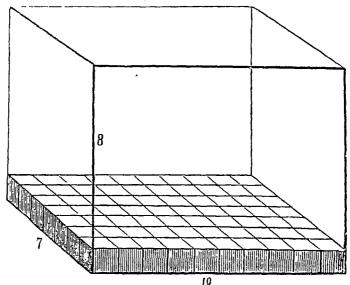
Для измъренія объемовъ сыпучихъ тълъ (ржи, пшеницы, овса и т. п.) употребительны:

Четверть=2 осьминамъ=8 четверикамъ (или мърамъ), четверикъ=8 гарицамъ.

Гарнець вмѣщаеть въ себѣ 8 фунтовъ чистой воды; четверикъ есть сосудъ, котораго вмѣстимость немного менѣе куб. фута (1601 куб. дюймъ).

Замътимъ, что слова «четвернкъ» и «четверть» обыкновенно пишуть сокращенно такъ: «чк.» и «чт.».

93. Измъреніе нъкоторыхъ объемовъ. Если объемъ представляеть собою форму, ограниченную 6-ю прямоугольниками *), то его легко измърить. Пусть,



напр., требуется узнать, сколько куб. аршинъ заключается въ объемъ комнаты. Для этого достаточно измърить лицейнымъ аршиномъ длину, ширину и высоту ком-

^{*)} форму прямоугольнаго параллелепипеда.

наты и полученныя числа перемножить. Пусть, напр., длина комнаты будеть 10 аршинь, ширина—7 арш., а высота—8 арш. Умпоживь 10 на 7, мы узнаемь, что на нолу комнаты помъстится 70 квадр. аршинь. Очевидно, что на каждомь изъ этихъ 70 квадр. аршинь можно поставить одинъ куб. аршинъ, а на всемъ полу ихъ установится 70. Тогда получится слой кубовъ въ одинъ аршинъ высоты (какъ изображено у насъ на чертежъ). Такъ какъ комната имъетъ въ высоту 8 арш., то въ ней можно помъстить одинъ на другой 8 слоевъ. Тогда всъхъ куб. аршинъ окажется 70×8, т.-е. 560, или произведеніе трехъ чиселъ: 10×7×8.

Такъ же можно узнать объемъ ящика, ствны, ямы съ отвъсными ствиками и съ прямоугольнымъ основаниемъ и т. и.

94. Мъры торговаго въса.

Пудъ=40 фунтамъ. | Лоть=3 золотникамъ. Фунть=32 лотамъ=96 золот. | Золотникъ=96 долямъ.

Замѣтимъ, что фунтъ есть вѣсъ 25 куб. дюймовъ чистой воды, а и у дъ-вѣсъ 1000 куб. дюймовъ чистой воды.

Мъры аптенарскаго въса. Аптенарскій фунть меньше торговаго фунта на одну восьмую часть; онъ равенъ 28 лотамъ или 84 золоти. торговаго въса.

Ап. фунть=12 унціямь. | Драхма=3 скрупуламь. Унція=8 драхмамь. | Скрупуль=20 гранамь *).

95. Мъры цъны (деньги). Какъ мъры цъны употребляются или металлическія монеты, или кредитные билеты.

Металлическія монеты употребительны золотыя, серебряныя и м'ёдныя.

Золотая монета чеканится изъ силава, содержащаго на 9 въсовыхъ частей золота 1 въсовую часть мъди. Въ настоящее время чеканятся золотыя монеты въ 10 руб. и въ 5 руб.; имъются еще въ обращения золотыя монеты преж-

^{*)} Въ настоящее время въ аптекахъ примъняется также и метрическая система въса; см. объ этомъ выноску въ концъ § 200.

няго чекана въ 15 руб. (пмперіаль), и въ 7 руб. 50 коп. (полупмперіаль).

Серебряная монета въ 1 рубль, въ 50 коп. и въ 25 коп. чеканится изъ сплава, содержащаго на 9 въсовыхъ частей серебра 1 въсовую часть мъди, а серебряная монета въ 20 коп., 15 коп., 10 коп. и 5 коп. чеканится изъ сплава, содержащаго на 5 въсовыхъ частей серебра 5 частей мъди.

Мъдная монета чеканится: въ 5 коп., 3 коп. 2 коп., 1 коп., въ полкопейки и въ четверть копейки.

Кредитные билеты употребляются: въ 500 руб., 100 руб., 50 руб., 25 руб., 10 руб., 5 руб., 3 руб. и 1 руб.*). Мъры бумаги. Стопа = 20 дестямъ, десть = 24 листамъ.

96. Мѣры времени. Есть двё основныя мёры времени: сутки и годъ. Сутки представляють (приблизительно) то время, въ теченіе котораго земля совершаеть полный обороть около своей оси; онё раздёляются на 24 часа, считаемые отъ 1 до 12 и затёмъ опять отъ 1 до 12. За начало сутокъ принимають полночь, т.-е. 12 часовъ ночи.

Недъля=7 суткамъ. Часъ=60 минутамъ. Сутки=24 часамъ. Минута=60 секундамъ.

Годъ представляеть собою (приблизительно) то время, въ теченіе котораго земля совершаеть полный обороть кругомь солнца. У нась принято считать каждые 3 года въ 365 дней, а четвертый—въ 366 дней. Годъ, содержащій въ себъ 366 дней, называется високоснымъ, а года, содержащіе по 365 дней,—простыми. Къ четвертому году добавляють одинъ лишній день по следующей причинъ. Время обращенія земли вокругь солнца содержить въ себъ не ровно 365 сутокъ, а 365 сутокъ п 6 часовъ (приблизительно). Такимъ образомъ, простой годъ короче истиннаго года на 6 часовъ, а 4 простыхъ года короче 4-хъ истин-

^{*)} Временно въ 1915 г. введены бумажныя деньги въ 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 и 50 копвекъ. -

ныхъ годовъ на 24 часа, т.-е. на однъ сутки. Поэтому къ каждому четвертому году добавляютъ однъ сутки (29-е февраля). Случплось такъ, что годъ, отъ котораго мы ведемъ наше лътосчисление (т.-е. годъ Рождества Христова), былъ високосный; поэтому слъдующие затъмъ високосные годы были: 4-й, 8-й, 16-й, 20-й... вообще такие годы, которыхъ числа дълятся на 4 безъ остатка; такъ, 1912-й годъ былъ високосный (1912 дълится на 4 безъ остатка), года же 1913, 1914, 1915 были простые.

Годъ раздъляется на 12 неравныхъ частей, называемыхъ мѣсяцами. Вотъ названія мѣсяцевъ по порядку: январь (31 день), февраль (28 или 29), мартъ (31), апрѣль (30), май (31), іюнь (30), іюль (31), августъ (31), сентябрь (30), октябрь (31), ноябрь (30), и декабрь (31).

Л'єтосчисленіе, по которому три года считаются въ 365 дней, а четвертый въ 366 было установлено римскимъ диктаторомъ Юліємъ Цезаремъ (въ 46 году до Р. Х.) и потому наз. юліанскимъ. Оно принято у насъ въ Россіи. Въ западной Европъ считаютъ нъсколько иначе, а именно тамъ счетъ идетъ на 13 дней впереди нашего; такъ, когда мы считаемъ 1-е января, тамъ считають 14-е января.

97.* Григоріанское пѣтосчисленіе. Время, протекающее отъ одного весенняго равноденствія до слѣдующаго весенняго равноденствія, называется с о л н е ч н ы м ъ и л и т р о и ич е с к и м ъ г о д о м ъ; время, считаемое за годъ по гражданскому лѣтосчисленію, называется г р а ж д а н с к и м ъ г о д о м ъ.

Тажъ какъ перемѣны временъ года зависятъ отъ положенія земии относительно солица, то солнечный годъ представляеть такой промежутокъ времени, въ теченіе котораго вполнѣ завершаются перемѣны временъ года. Поэтому желательно, чтобы годъ гражданскій по возможности совпадаль съ годомъ солнечнымъ; только при этомъ условіи времена года будутъ приходиться въ одни и тѣ же мѣсяцы. Лѣтосчисленіе, введенное Юліємъ Цезаремъ, достигаетъ этого не вполнѣ. По этому счисленію гражданскій годъ считается въ 365 дней и

6 часовъ, тогда какъ солнечный годъ содержить (приблизительно) 365 дней 5 часовъ 48 мин, 48 сек., такъ что годъ юліанскаго счисленія плиннъе солнечнаго (приблизительно) на 11 мин. 12 сек., что въ 400 итть составляеть почти 3 дня. Юліанское п'втосчисленіе исправлено было впервые папою Григоріемъ XIII-мъ въ 1582 году. Къ этому году разница между гражданскимъ счисленіемъ времени и солнечнымь составляла 10 сутокь, такь что считали, напр., 1-е сентября, когда следовало бы по солнечному времени считать 11-е сентября. Чтобы уравнять гражданское время съ солнечнымъ, Григорій XIII повельль виното 5 октября въ 1582 г. считать 15-е октября. Но такъ какъ подобное запаздываніе должно было повториться и впоследствий то Григорій XIII установиль, чтобы на будущее время каждыя; 400 льть гражданскаго счисленія были сокращены на 3-е сутокъ. Это сокращеніе должно было производиться такимъ образомъ. По юліанскому счисленію тъ годы, которыхъ числа представляють полныя сотни, считаются високосными; напр., годы 1600-й, 1700-й и т. п. должны считаться по юдіанскому счисленію въ 366 дней. Но Григорій XIII повел'ємь, чтобы такіе годы считались простыми, кромъ тъхъ, у которыхъ число сотенъ дълится на 4. Всявдствіе этого, по счисленію папы Григорія, годъ 1600-й должень быль считаться високоснымъ (16 делится на 4), а годы: 1700, 1800, 1900-простыми, тогда какъ по юдіанскому счисленію всв эти 4 года считались високосными. Такимъ образомъ, каждыя 400 лёть сокращаются на 3-е сутокъ. Счисленіе, установленное Григоріемъ XIII, извъстно подъ именемъ григоріанскаго. Оно въ настоящее время принято по всей Европъ, кромъ Россіи и Гредіи. Григоріанское счисленіе называется иначе новымъ стилемъ, а юліанское-старымъ стилемъ. Такъ какъ въ 1582 году новый стиль подвинулся впередъ отъ стараго стиля на 10 дней, а послѣ того еще на 3 дня (въ 1700,1800 и 1900 годахъ), то въ настоящее время старый стиль отстаетъ отъ новаго на 13 пней.

98. Именованное число. То, что получается послё измёренія величины (результать измёренія), назы-

вають числомъ. Число наз. именованнымъ, если при немъ оставлено название единицы измърения, напр., 7 саженъ. Число наз. отвлеченнымъ, если при немъ не поставлено названия единицы, которою производилось измърение; таково, напр., число 7.

Именованное число наз. простымъ, если оно составлено изъ единицъ только одного названія, напр., 13 фунтовъ. Именованное число называется составнымъ, если оно со-тавлено изъ единицъ разныхъ названій, напр.:

13 фунтовъ 5 лотовъ 2 золотника.

Замѣтимъ, чтобесли составное именованное число составнено правильно то всякое отдѣльное число въ немъ не должно составлять ни одной единицы слъдующаго высшаго разряда; напр., такое число:

2 пуда 85 фунтовъ

неправильно составлено, потому что 85 фунтовъ больше 40 фунтовъ и, значить, 85 фунтовъ содержать въ себъ нъсколько пудовъ (именно 2 пуда 5 фунт.). Правильно составленное число будеть 4 пуда 5 фунт.

99*. Двойное опредъленіе числа. Въ начать этого учебника число было опредълено, какъ собраніе единицъ (§ 1). Теперь числу дано другое опредъленіе, а именно: число есть результать измъренія. Это второе опредъленіе даеть числу болье широкое значеніе, чымь первое; оно обнимаеть собою и числа цылыя, и числа дробныя.

11. Преобразованіе именованнаго числа.

100. Равенство и неравенство именованныхъ чиселъ. Если два именованныя числа выражають собою одно и то же значене величины, то такія именованныя числа считаются равными между собою; напр., составное имен. число 2 саж. 1 арш. равно простому имен. числу 7 арш., потому что оба эти числа выражають одну и ту же длину.

Изъ двухъ неравныхъ именованныхъ чиселъ то считается большимъ, которое выражаетъ большее значеніе величины. Такъ, именованное число 3 фунта 40 зол. больше именованнаго числа 20 лот. 18 зол., такъ какъ въсъ, выраженный первымъ числомъ, больше въса, выраженнаго вторымъ числомъ.

Очень часто приходится преобразовывать одно именованное число въ другое именованное число, равное ему. Такихъпреобразованій есть два:раздробленіе и превращеніе.

101. Раздробленіе. Раздробленіемъ именованнаго числа наз. преобразованіе его въ единицы одного какогонибудь низшаго разряда.

Примъръ: 5 пуд. 4 фунта 15 лотовъ раздробить въ зо-

Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, узнаемъ сначала, сколько въ 5 пуд. заключается фунтовъ; къ полученному числу приложимъ 4 фунта; затѣмъ узнаемъ, сколько во всѣхъ фунтахъ заключается лотовъ; къ полученному числу приложимъ 15 лотовъ; наконецъ, узнаемъ, сколько во всѣхъ потахъ заключается золотниковъ. Дѣйствія расположимъ такъ:

```
5 пуд. 4 фун. 15 лотовъ.

×40

200 . . . . фунтовъ въ 5 пудахъ.

+ ±

204 . . . . фунта въ 5 пуд. 4 фунт.

×32

408

612

6528 . . . . лотовъ въ 5 пуд. 4 фун.
```

6528 лотовъ въ 5 пуд. 4 фунт. +15 6543 лота въ 5 пуд. 4 фунт. 15 лот. ×3 19629 золотниковъ въ 5 пуд. 4 фунт. 15 лот.

102. Превращеніе. Превращеніемъ именованнаго числа называется преобразованіе его въ единицы высшихъ разрядовъ.

Примъръ: 19629 золотниковъ выразить въ мърахъ высшихъ разрядовъ.

Чтобы рёшить этотъ вопросъ, узнаемъ сначала, сколько въ 19629 золотникахъ заключается лотовъ; потомъ, сколько въ полученномъ числё лотовъ заключается фунтовъ; потомъ, сколько въ этихъ фунтахъ пудовъ.

Дъйствія расположимъ такъ:

19629 зол. = 5 пуд. 4 фун. 15 лот.

III. Дѣйствія надъ именованными числами.

103. Предварительное замѣчаніе. Если бы именованныя числа всегда выражались при помощи одной и той же единицы, то дѣйствія надъ ними ничѣмъ не отличались бы отъ дѣйствій надъ числами отвлеченными; такъ, складывать 215 пуд. и 560 пуд. надо совершенно такъ же,

какъ складываются 215 какихъ угодно единицъ съ 560 гакими же единицами. Но именованныя числа часто выражаются при помощи единицъ различныхъ названій; гогда дъйствія надъ ними производятся иначе, чъмъ дъйствія надъ числами отвлеченными.

104*. Смыслъ дъйствій надъ именованными числами. С у мм о ю нѣсколькихъ данныхъ значеній одной и той же величины наз. новое значеніе той же величины, составленное изъ ч ас т е й, соотвѣтственно равныхъ даннымъ значеніямъ. Такимъ образомъ, напр., можетъ быть сумма нѣсколькихъ данныхъ длинъ, сумма нѣсколькихъ данныхъ вѣсовъ и т. п.

Понятіе о суммѣ служить основаніемь для опредѣленія дѣйствій надъ вначеніями величины. Эги опредѣленія слѣдующія.

Дъйствіе, посредствомъ котораго отыскивается сумма, назы-, вается сложеніемъ.

Дъйствіе, посредствомъ котораго по данной суммъ и одному слагаемому отыскивается другое слагаемое, наз. вычитаніемъ.

Дъйствіе, посредствомъ котораго данное значеніе величины повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько въ данномъ ч и с л ъ есть единицъ, наз. у м и о ж е и і е м ъ.

Дъйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію и одному изъ сомножителей отыскивается другой сомножитель, наз. дъленіемъ.

Когда значенія величины измёрены, то они выражаются именованными числами; тогда дёйствія надъ вначеніями величины становятся дёйствіями надъ именованными числами; но емысль дёйствій оть этого не измёняется.

105. Сложеніе. Для удобства подписывають слагаемыя одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного названія стояли въ одномъ вертикальномъ стоябцѣ. Начинаютъ сложеніе съ единиць пизшаго разряда; затѣмъ переходятъ послѣдовательно къ сложенію единицъ слѣдующихъ выстшихъ разрядовъ. Напр.:

	5	вер.	. 490	саж.	. 6	фут.	11	дюйм.
	10		432	>>	5	*	10	»
+ {	8 2	>	460	>>	4	D	9	*
			379	>	3	>	11	>
	3	>	446	>	2	Þ	10	>
	28	pep.	2207	cant.	 20	фут.	51	люим.
	32	вер.	210	сая:.	3	фут.	3	дюйм.

Послі сложены получилось (подъ первою чертою) пеправильно составленное именованное чисдо; подъ нимъ проводять вторую черту и превращають 51 дюймь въ 4 фута и 3 д.; 3 д. подписывають подъ второю чертою на мъстъ дюймовъ, а 4 ф. прикладывають къ 20 ф.; 24 ф. превращаютъ въ 3 саж. и 3 ф.; 3 ф. подписывають подъ второю чертою, а 3 саж. прикладывають къ 2207 саж. и т. д.

Можеть случиться, что въ одномь или въ итсколькихъ слагаемыхъ итть единицъ такихъ названій, какія есть ьъ остальныхъ слагаемыхъ; тогда на мъстахъ педостающихъ единицъ няшуть и ули. Илпр.:

(Здёсь превращения сдёланы въ умь. Получившійся отъ сложенія вершковъ 1 аршинъ надписанъ наверху, надъ аршинами слагаемыхъ; то же сдёлано съ саженью, получившеюся отъ сложенія аршинъ).

106. Вычитаніе. Пусть требуется вычесть 2 версты 80 саж. 2 арш. 5 вершк. изъ 9 вер. 50 саж. 2 арш. Подписываемь въ извёстномъ порядка вычитаемое подъ умень-взаемым и пловодимь черту:

6 вер... 469 саж... 2 арш... 11 вершк.

Чтобы вычесть 5 вершковь, беремь оть 2-хь аршинь 1 аршинь (въ знакъ чего стаеимь точку надъ 2 арш.); взятый аршинь раздробляемь въ вершки; получаемъ 16 вершк.; пишемъ 16 надъ 0 вершк. и вычитаемъ 5 вершк. изъ 16 вершк.; оставшеся 11 вершк. ипшемъ подъ чертою. 2 арш. изъ 1 арш. вычесть нельзя; беремъ отъ 50 саж. одну сажень (въ знакъ чего ставимъ точку падъ числомъ саженъ); раздробляемъ взятую сажень въ аршины и прикладываемъ къ 1 арш. уменьшаемаго; получаемъ 4 аршина; пишемъ 4 надъ числомъ аршинъ. Теперь вычитаемъ 2 арш. изъ 4-хъ арш.; остатокъ 2 иншемъ подъ чертою. Продолжаемъ такъ дъйствіе до конца.

Воть еще примъръ вычитанія, въ которомъ на мъста недостающихъ разрядовъ мъръ поставлены нули:

107. Умноженіе. Такъ какъ множитель означаеть, сколько разъ множимое должно быть повторено слагаемымъ, то онъ всегда есть число отвлечениое. Поэтому надо только разсмотръть умноженіе именованнаго числа на отвлеченное.

Примъръ I. (64 чт. 7 чк. 3 гарн.) \times 6. Расположимъ дъйствіе такъ:

64 чт.... 7 чк.... 3 гарн. × 6 384 чт... 42 чк.... 18 гарн. 389 чт... 4 чк.... 2 гари. Умноживъ на 6 отдъльно гарнцы, чегверики и четверти, получимъ (подъ первою чертою) неправильно составленное именованное число: 384 чт. 42 чк. 18 гарн. Чтобы преобразовать его въ правильно составленное именованное число, превращаемъ (въ умъ или на сторонъ) 18 гарн. въ 2 чк. и въ 2 гарн.; 2 гарнца подписываемъ подъ второю чертою, а 2 чк. прикладываемъ къ 42 чк., отчего получаемъ 44 чк.; превращаемъ эти 44 чк. въ 5 чт. и 4 чк.; 4 чк. подписываемъ подъ второю чертою, а 5 чт. прикладываемъ къ 384 чт.; получимъ 389 чт.

Примъръ 2. (26 пуд. 38 фунт. 84 зол.) × 78.

Когда множитель состоить изъ двухъ или более цыфръ, то лучше производить на стороне какъ умноженія отдёльныхъ чиселъ множимаго, такъ и превращенія. Действіе полезно расположить такъ:

26 пуд	38 фун.	84 зол. ×78		
2103 пуд 84	. 32 фун. I 38	24 зол. 26		
× 78	× 78	× 78		
672 588	30 4 266	208 182		
6552 96 576 68	2964 + 68	2028 + 75		
792 768	3032 40 280 75	2103 пуд.		
24 вол.	232 200			
	32 фун.			

Умноживъ на сторонъ (подъ горизонтальной чертой, въ первомъ слъва столбцъ) 84 зол. на 78, мы получаемъ 6552 зол. Превращениемъ узнаемъ, что 6552 зол. составля-

ютъ 68 фун. и 24 зол. Эти 24 зол. подписываемъ въ произведеніи (подъ горизонтальной чертой), а 68 фунт. пока оставляемъ. Умноживъ затёмъ на сторонъ (во второмъ столбцъ) 38 фун. на 78, мы получаемъ 2964 ф.; прибавляемъ къ нимъ 68 ф., получившеся послъ умноженія золотниковъ. Превращаемъ 3032 ф. въ пуды. Получаемъ 75 пуд. и 32 фунт. Эти 32 ф. пишемъ въ произведеніи (подъ горизонтальной чертой), а 75 пуд. пока оставляемъ. Затёмъ такимъ же образомъ умножаемъ пуды.

- 108. Дѣленіе. Дѣленіе именованныхъ чиселъ, какъ и отвлеченныхъ, имѣетъ двоякое значеніе:
- 1) по данному произведению и данному множимому найти множителя; другими словами, узнать, сколько разъвъодномъ именованномъ числъ содержится другое именованное число:
- 2) по данному произведенію и данному множителю найти множимое; другими словами, данное пменованное число разложить на столько равныхъ частей, сколько въ данномъ отвлеченномъ числъ находится единицъ.

Разсмотримъ по одному примъру на каждый изъ этихъ случаевъ.

1) Дъленіе именованнаго числа на именованное.

Пусть требуется узнать, сколько разъ 8 ф. 2 л. содержатся въ 3 п. 18 фунт. Для этого раздробимъ дёлимое и дёлителя въ мёры одного названія, и притомъ въ самыя мелкія, какія есть въ дёлимомъ и въ дёлителё, т.-е. въ нашемъ прим'ёр'въ-въ доты:

3 п 18 фун.	8 фун 2 л.
\times 40	\times 32
120	256
+18	+2
138	258 лотовъ.
\times 32	
276	
414	
4416 лотовъ.	

Теперь узнаемъ, сколько разъ 258 лот. содержатся въ 4416 лотахъ:

Мы узнали такимъ образомъ, что 258 лот. (т.-е. '8 ф. 2 л.) содержатся въ 4416 лот. (т.-е. въ 3 п. 18 ф.) 17 разъ, при чемъ 30 лот. остаются въ остаткъ.

Замѣчаніе. При дѣленіи именованнаго числа на именованное частное есть число отвлеченное, потому что опо означаеть, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.

2) Дъленіе именованнаго числа на отглеченное.

Пусть требуется 18 версть 137 саж. 2 арш. раздёлить на 14 равных частей. Для этого всего удобиве поступить такъ: раздёлимь 18 версть на 14 (равных частей); оставшіяся оть дёленія версты раздробимь въ сажени; приложимь 137 саж.; раздёлимь получившееся число саж. на 14 (равных частей); оставшіяся сажени раздробимь въ аршины; приложимь 2 арш.; наконець, раздёлимь получившееся число аршинь на 14 (равных частей).

Дъйствіе располагается такъ:

^{4...}версты въ остаткъ.

^{× 500} 2000 + 137

^{2137...} саженъ.

2137 саженъ.
73:
37
9 саж. въ остаткъ
×3
27
+2
29 аршинъ.
1 арш. въ остаткъ
×16

16... вершковъ.

2... верши. въ остатив.

Замѣчаніе. При дѣленни именованнаго числа на отвлеченное частное всегда должно быть числомъ именованнымъ, такъ какъ оно представлиеть собою одну изъ частей дѣлишаго.

IV. Задачи на вычисленіе времени.

109, Задача 1. Пароходъ вышелъ изъ гавани 27-го апръля, въ 7 часовъ утра. Когда пароходъ возвратился въ эту гавань, если опъ пробылъ въ плаваніи 6 мѣс. 8 дией 21 часъ 40 мпп.?

Первое рѣшеніе. Когда говорять, что оть такого-то числа такого-то мѣсяца прошель 1 мѣсяць, то это значить, что наступило такое же число слѣдующаго мѣсяца. Если, напр., оть 27-го апрѣля (7 часовъ утра) прошель 1 мѣсяць, то это значить, что наступило 27-е мая (7 часовъ утра). Замѣтивь это, будемь рѣшать нашу задачу такъ:

Возвращеніе парохода произошло позже его отбытія на 6 міс. 8 дней 21 ч. 40 м. Это значить, что послів его отбытія прошло сначала 6 міс., потомь 8 дней, затімь 21 чась 40 м. и тогда пароходь возвратился *). Когда оть 27-го

^{*)} Въ такомъ порядкъ считаютъ обыкновенно. Во всякомъ случав должно предварительно условиться относительно порядка

апръля (7-ми часовъ утра) прошелъ 1 мъсяцъ, то паступило 27-е мая (7 час. утра); когда прошелъ другой мъсяцъ, наступило 27-е іюня (7 час. утра); продолжая такъ прикладывать по 1 мъсяцу 6 разъ, получимъ 27-е октября (7 час. утра). Посяъ этого прошло еще 8 дней. Такъ какъ въ октябръ 31 день, то изъ этихъ 8 дней 4 дня приходились на октябръ, а остальные 4 дня—на ноябрь. Значитъ, наступило 4-е ноября (7 часовъ утра). Потомъ прошло еще 21 часъ. Если бы прошло 24 часа, то было бы 5-е ноября 7 час. утра. Но 21 часъ менъе 24-хъ на 3 часа; значитъ, было 5-е ноября 4 часа утра; наконецъ, прошло еще 40 мин. и тогда пароходъ возвратился. Итакъ, возвращеніе парохода было 5-го ноября въ 4 часа 40 мин. утра того же года.

Такъ обыкновенно и рѣшаются подобныя задачи, если промежутокъ времени, протекшій отъ одного событія до другого, не великъ. Въ противномъ случаѣ удобнѣе будетъ слѣдующій пріемъ.

Второе ръшеніе. Предварительно узнаемь, сколько времени прошло съ начала года, т.-е. съ 1-го января, до 27-го апръля 7-ми часовъ утра. Прошло 3 мъсяца: январь, фе-

27-е апръля.

Прошло 6 мвс.... 27-е окт. Прошло 8 дней..... 5-е мая. Прошло 8 дней... 4-е ноябр. Прошло 6 мвс.... 5-е ноября.

Такимъ образомъ оказывается, что промежутокъ, слъдующій за 27 апръля и равный 6 м.+8 дн., короче промежутка 8 дн.+6 мъс. Причина будетъ ясна изъ слъдующаго расчета:

6 мвс. послв 27-го апр. 6 мвс. послв 5-го мая.

1) 27 апр. —27 мая . 30 дн. 1) 5 мая —5 іюня . 31 д. 2) 27 мая —27 іюня . 30 д. 3) 5 іюня—5 іюля . 30 д. 3) 5 іюля—5 авг. . 31 д. 4) 27 іюля—27 авг. . 31 д. 4) 5 авг. —5 сент. . 31 д. 5) 27 авг. —27 сент. . 31 д. 5) 5 сент. —5 окт. . . 30 д. 6) 5 окт. —5 ноябр. . 31 д. 7.

слъдованія годовъ, мъсяцевъ и дней, такъ какъ величина промежутка времени, выраженнаго въ такихъ, не вполнъ постоянныхъ единицахъ, зависитъ отъ порядка ихъ. Напр., промежутокъ времени, слъдующій за 27-мъ апръля и равный 6 мъс. + 8 дней, не равенъ промежутку времени, слъдующему тоже за 27-мъ апръля, но равному 8 дн. + 6 мъс. Это видно изъ слъдующей таблицы:

враль и марть, и 26 дней апрёля; такь какъ отбытіе произошло въ 7 часовъ утра, то, значить, прошло еще 7 часовъ следующаго дня (27 апрёля). Всего съ начала года до отбытія парохода прошло 3 мёс. 26 дн. 7 час. Теперь приложимъ къ этому числу 6 мёс. 8 дней 21 час. 40 мин.:

Превращая 35 дней въ мѣсяцы, мы должны задаться вопросомъ, во сколько дней считать мѣсяць. Для этого обратимъ вниманіе, что отъ начала года прошло 9 мѣсяцевъ; значитъ, изъ 35 дней долженъ составиться 10-й мѣсяцъ, а 10 мѣсяцъ (октябрь) содержитъ 31 день; поэтому изъ 35 дней осталось 4 дня, а 31 день составили 1 мѣсяцъ (который мы приложили къ 9 мѣсяцамъ) *).

Мы узнали, что оть начала года до возвращенія парохода прошло 10 міс. 4 дня 4 часа 40 мин. Но это не окончательный отвіть на вопрось, потому что требовалось узнать, когда пароходь возвратился, а не сколько времени прошло оть начала года до возвращенія парохода. Поэтому переділаемь отвіть такь, чтобы онь отвічаль на вопрось «когда?» Если прошло 10 місяцевь, то, значить, начался 11-й місяць: ноябрь. Если прошло 4 дня этого місяца, то, значить, началось уже 5-е число ноября. Итакь, пароходь возвратился 5-го ноября вь 4 часа 40 мин. утра.

109,2. Задача 2. Путешественникъ возвратился демой 5-го ноября въ 2 часа 10 мин. пополудни. Когда онъ отправился въ путешествіе, если его отсутствіе изъ дома продолжалось 4 мъс. 25 дн. 19 час.?

^{*)} Разсмотръвъ внимательно сложение, которое намъ пришлось выполнить въ этой задачъ, мы легко замътимъ, что въ немъ сохраненъ тотъ порядокъ слъдования (дни за мъсяцами), о которомъ мы говорили въ предыдущей выноскъ. Въ самомъ дълъ, 35 дней мы прибавляемъ послъ того, какъ прибавлены 6 мъсяцевъ, в не раньше.

Первое ръшение. Отсутствие путешественника продолжалось 4 мвс. 25 днен 19 часовь. Это надо понимать такъ: послъ отправленія въ путешествіе прошло спачала 4 мъс., потомъ прошло еще 25 дней, затъмъ еще 19 часовъ, и тогда путешественникъ возвратился, т.-е. тогда наступило 5-е ноября 2 часа 10 мпн. пополудии. Поэтому, чтобы опреивлить время отбытія путешественника, мы оть <5-го поября 2 часа 10 мпн. пополудии» мысленно отодвинемся назадъ сначала на 19 часовъ, нотомъ еще на 25 дней и, наконецъ, еще на 4 мъсяца. Если бы отодвинуться назадъ не на 19 часогъ, а на 24 часа, то получилось бы 4-е ноября 2 часа 10 мин. пополудни. Но 19 часовъ менъе 24-хъ часовъ на 5 час.: слъд., получимъ 4-ое поября 7 час. 10 мин. пополудии. Теперь отодвинемся назадъ на 25 дней. Сбросивъ 4 дня, получимъ 31 октября; отодвинувшись еще на 21 день, получимъ 10-е октября 7 час. 10 мин. пополудии. Теперь сбросимъ 4 мъсяца. Получимъ 10-е іюня 7 час. 10 мин. пополудии *).

Когда промежутокъ времени, который надо отнять, выражается большими числами, то удобнъе ръшать задачу следующимъ пріемомъ.

Второе рѣшеніе. Узнаємъ, сколько времени прошло отъ начала года до 5 ноября 2 час. 10 мпн. пополудни. Прошло 10 мѣсяцевъ (январь, февраль... октябрь), 4 дня (ноября) и нѣсколько часовъ и минутъ. Чтобы узнать, сколько часовъ и минутъ, примемъ во вниманіе, что за начало дня считается полночь. Отъ нолуночи до полудня прошло 12 часовъ; но возвращеніе совершилось въ 2 часа 10 мнн. пополудни; значитъ, отъ полуночи до возвращенія прошло 14 час. 10 мнн. Всего отъ начала года до возвращенія путешественника прошло 10 мѣс. 4 дня 14 час. 10 мнп.

^{*)} II въ этой задачт получили бы другой ответъ (9 іюня), если бы мы отсчитывали сначала 4 мъсяца, потомъ 25 дней, в потомъ 19 часовъ, т.-е. если бы мы понимали продолжительность путешествія не какъ сумму 4 мъс. +25 дней +19 час., в какъ сумму 19 час. +25 дней +4 мъсяца.

Теперь вычтемъ изъ этого числа то время, которое путетественникъ пробыть въ путешествін:

При вычитаніи дней намъ пришлось занять одинъ міссяць и раздробить его въ дин. Въ такихъ случаяхъ надо сообразить, какой місяць раздробляемъ въ дни, потому что не всі місяцы содержать одинаковое число дней. Въ нашей задачі з дня уменьшаемаго принадлежать ноябрю (потому что 10 міс., начиная съ начала года, уже прошли); такъ какъ 25 дней вычитаемаго нельзя отнять отъ этихъ з-хъ дней поября, то приходится часть ихъ отнимать отъ 10-го місяца, т.-е. отъ октября; октябрь имість 31 день; прибавивъ 31 день къ 3 днямъ ноября, получимъ 34 дня.

Сдёлавъ вычитаніе, мы узнали, что отъ начала года до отправленія путешественника въ путь прошло 5 мёс. 9 дней 19 часовъ 10 мин. Но это не окончательный отвётъ, потому что требовалось узнать, когда произошло отправленіе. Передёлаемъ отвётъ такъ, чтобы онъ отвёчаль на вопросъ: скогда? Если прошло 5 мёс., то, значитъ, наступиль 6-й мёсяцъ, йонь; если 9 дней этого мёсяца прошли, то, значить, наступило 10-е йоня; притомъ 10-го йоня прошло уже 19 час. 10 мин.; значитъ, часы будутъ показывать 7 час. 10 мин. пополудни. Итакъ, йутешественникъ отправился въ путь 10-го йоня въ 7 час. 10 мин. пополудни того же года.

109,3. Задача З. Императоръ Александръ I вступилъ на престолъ 12-го марта 1801-го года и скопчался 19-го ноября 1825-го года. Сколько времени царствовалъ Императоръ Александръ I?

Первое ръшеніе. Оть 12-го марта 1801 года до 12-го марта 1825 года прошло ровно 24 года. Оть 12-го марта 1825 года до 12-го ноября того же года прошло 8 мѣсяцевъ; наконецъ отъ 12 поября до 19 ноября прошло 7 дней; значитъ, Александръ I царствовалъ 24 года 8 мѣс. и 7 дней.

Второе ръшеніе. До 12 марта 1801 года отъ Р. Хр. прошло 1800 лътъ 2 мъсяца и 11 дней, а до 19-го ноября 1825-го года прошло 1824 года 10 мъс. 18 дней. Для ръшенія задачи надо, очевидно, вычесть изъ послъдняго числа первое:

Это будеть окончательный отвъть, потому что въ задачъ требовалось узнать, сколько времени царствоваль Императоръ Александръ I.

109₁₄*. Точный счетъ времени. Въ описанныхъ примърахъ рѣчь идетъ о такъ называемомъ календарномъ счетѣ времени, по которому промежутокъ времени выражается въ единицахъ, не виолиѣ постоянныхъ, т.-е. въ годахъ и мѣсяцахъ. По точному счету промежутокъ времени долженъ бытъ выраженъ въ постоянныхъ единицахъ, т.-е. въ недѣляхъ, дняхъ и подраздѣленіяхъ дня. Календарный счетъ употребляется во многихъ вопросахъ практической жизни, когда не важно знатъ точный размѣръ какого-нибудъ промежутка времени, а только число календарныхъ годовъ и мѣсяцевъ, заключавшееся въ немъ (напр., при уплатѣ жалованъя, разсчитываемаго обыкновенно по мѣсяцамъ).

Покажемь вдёсь на двухь примёрахь, какъ слёдуеть поступать въ тёхъ случаяхъ, когда рёчь идеть о точномъ счете времени.

Предварительно замѣтимъ, что по календарному счету промежутокъ времени отъ какого-нибудь момента даннаго года до тако го же момекта сиѣдующаго года (напр., отъ полудня 15-го марта 1914 г. до полудня 15-го марта 1915 г.) принимается равнымъ году; подобно этому, промежутокъ отъ какого-нибудь момента одного мѣсяца до такого же момента слѣдующаго мѣсяца (напр., отъ 2 час. дня 13-го мая до 2 час. дня 13-го іюня того же года) прини-

мается ва мѣсяцъ. Годовой промежутокъ содержить въ себѣ 366 дней или 365, смотря по тому, было ли въ этомъ промежуткѣ 29-е число февраля, или не было. Напр., годъ отъ 15-го іюня 1895 года до 15-го іюня 1896 года содержаль въ себѣ 366 дней, такъ какъ въ этомъ промежуткѣ было 29-е февраля (1896 годъ—високосный); промежутокъ же отъ 15-го іюня 1913 года до 15-го іюня 1914 года имѣлъ 365 дней, такъ какъ февраль въ 1914 году содержалъ только 28 дней. Мѣсячный промежутокъ можетъ содержать въ себѣ 28, 29, 30 и 31 день, смотря по тому, будетъ ли въ этомъ промежуткѣ послѣднее число мѣсяца 28-е, или 29-е, или 30-е, или 31-е. Напр.:

отъ 20 февр. 1912 г. до 20 марта 1912 г. прошло 29 дн. (въ 1912 г. послъднее число февраля—29-е);

отъ 20 февр. 1911 г. до 20 марта 1911 г. прошло 28 дн. (въ 1911 г. послъднее число февраля—28-е);

оть 20 марта любого года до 20 апр. того же года—31 д. (послъднее число марта есть 31-е);

отъ 20 апр. любого года до 20 мая того же года—30 дн. (послъднее число апръля есть 30-е).

Заметивъ это, решимъ следующие примеры.

Примъръ 1. Начало событія 13-го сентября 1890 г. Конецъ событія 2-го іюня 1897 г. Опредълимь точную величину продолжительности его.

96

Оть Р. Хр. до конца событія прошло 1896 л. 5 м. 1 д. Оть Р. Хр. до начала событія прошло 1889 л. 8 м. 12 д. Продолжительность событія по кал. счету 6 л. 8 м. 20 л.

Выразимъ теперь найденный промежутокъ времени въ дняхъ. Предположимъ сначала, что каждый годъ имъетъ 365 дней, а каждый мъсяцъ 30 дней. Тогда число дней будетъ:

Теперь исправимъ этотъ счетъ. Во-первыхъ, разсчитаемъ, сколько изъ 6-ти годовъ нашего промежутка было високосныхъ. 29-е февраля приходилось въ 1892 г. и въ 1896 г. Значитъ, число дней должно быть увеличено на 2. Во-вторыхъ, опредёлимъ поправку на мъсяцы. Когда отъ 13 сентября 1890 года прошло

6 лъть, то наступило 13 сентября 1896 года; затъмь еще прошли 8 мъсяцевъ. Значить, эти 8 мъсяцевъ обнимають собою промежутокъ времени отъ 13 сентября 1896 года до 13 мая 1897 г. За этоть промежутокъ 31-ое число приходилось 4 раза: въ октябръ, декабръ, январъ и мартъ; кромъ того, въ этомъ промежуткъ быль февраль. Такъ какъ это—февраль 1897 года (годъ простой), то онъ содержаль въ себъ 28 дней. Значить, число дней въ нашихъ 8 мъсяцахъ должно быть увеличено на 4—2, а число дней во всемъ нашемъ промеж ткъ должно быть увеличено на 2+4—2, т.-е. на 4, и потому оно должно быть 2454.

Примъръ 2. Нъкоторое событіе продолжалось 800 двей 20 час. 13 мин. Начало этого событія было въ 7 час. 40 м. вечера 18 февраля 1893 года. Опредълить моменть, въ который событіе окончилось.

Считая годъ въ 365 дией и мъсяцъ въ 30 дией, найдемъ, что 800 дией составляють 2 года 2 мъс. 10 дией; значить, 800 д. 20 ч. 13 м. =2 г. 2 м. 10 д. 20 ч. 13 м. (приблизительно).

Отъ Рожд. Хр. до начала событія прошло 1892 г. 1 мѣс. 17 дней 19 час. 40 мин. Прибавимь къ этому времени приблизительную величину даннаго промежутка:

Теперь едівлаємъ поправки, т.-е. опредівнить, насколько мы ошполись, допустивь, что 800 д.—2 года 2 мівс. 10 дн. Эти 2 года слідовали за 18 февр. 1893 года по 18 февр. 1895 года. Вь этомъ промежуткі високоснихъ годовъ не было; значить, въ нашемъ предположеніи, что годь—365 дн., не было ошибки. 2 мівсяца слідовали за 18 февр. 1895 г.; значить, это были мівсяцы:

- 1) отъ 18 февраля 1895 г. до 18 марта 1895 г. 28 дней.
- 2) оть 18 марта 1895 г. до 18 апр'яля 1895 г. <u>31</u> день. <u>59</u> дней.

Мы предполагали, что эти 2 мъсяца содержать 60 дней, а на самомъ дълъ опи имъли на 1 день меньше; вначить, 800

дней составляють не 2 года 2 мѣс. 10 дн., а 2 года 2 мѣс. 11 дн.; поэтому въ найденной суммѣ мы должны увеличить число дней на 1. Сдѣлавъ это, найдемъ, что отъ Рожд. Христ. до конца событія прошло:

1894 года 3 мвс. 29 дн. 15 час. 53 мпн.

и, значить, конець событія произошель въ 1895 году апреля 30-го въ 3 часа 53 мин. пополудни.

ОТДЪЛЪ ТРЕТІЙ.

О дѣлимости чиселъ.

I. Признаки дѣлимости.

110. Двѣ истины, на которыхъ основано нахожденіе признаковъ дѣлимости. Когда одно число дѣлится на другое безъ остатка, то для краткости рѣчи говорятъ просто, что первое число дѣлится на второе. Такъ, говорять: 15 дѣлится на 3, но не дѣлится на 4.

Существують признаки, по которымь легко узнать, не производя дёленія на самомь дёлё, дёлится или не дёлится данное число на нёкоторыя другія данныя числа. Нахожденіе этихъ признаковъ дёлимости основано на слёдующихъ двухъ истинахъ.

1) Если каждое слагаемое дълится на одно и то же число, то и сумма раздълится на это число.

Возьмемъ, напр., сумму: 15+20+40, въ которой каждое слагаемое дълится на 5. Это значитъ, что каждое изъ этихъ чиселъ можетъ быть составлено сложеніемъ интерокъ; тогда и сумма ихъ можетъ быть составлена сложеніемъ интерокъ. Такъ, сложивъ 3 интерки, получимъ 15; приложимъ еще 4 интерки, получимъ 15+20; наконецъ, добавивъ еще 8 интерокъ, получимъ 15+20+40; значитъ, сумма эта должна дълиться на 5*).

^{*)} Вообще, если каждое изъ чиселъ: a, b, c... дълится на число q, то это вначитъ, что $a=a_1q$, $b=b_1q$, $c=c_1q$... гдѣ a_1 b_1 , c_1 ... суть частныя отъ дѣленія a, b, c,... на q. Тогда:

 $a+b+c ..= a_1q+b_1q+c_1q+...$

2) Если одно изъ двухъ слагаемыхъ дѣдится, а другов не дѣлится на накое-нибудь число, то сумма ихъ не раздѣлится на это число.

Возьмемъ, напр., 2 числа: 20 и 17, изъ которыхъ первое дълится, а второе не дълится на 5. Это значитъ, что 20 можно составитъ сложеніемъ интерокъ, а 17 нельзя. Въ такомъ случаъ сумма 20 + 17 не можетъ быть составленъ сложеніемъ интерокъ, т.-е. эта сумма не дълится на 5*).

111. Признакъ дълимости на 2. Замътимъ, что всъ числа, которыя дълятся на 2, наз. четными, а тъ, которыя не дълятся на 2, наз. нечетными.

Десятокъ дѣлится на 2; поэтому сумма какого-угодно числа десятковъ дѣлится на 2. Всякое число, оканчивающееся нулемъ, есть сумма нѣсколькихъ десятковъ; напр., 430 есть сумма 43 десятковъ. Значитъ, всякое число, оканчивающееся нулемъ, дѣлится на 2.

Возьмемъ теперь два числа, изъ которыхъ одно оканчивается нечетною, а другое—четною цыфрою, папр., 327 и 328. Ихъ можно представить въ сидъ суммъ такъ:

$$327 = 320 + 7;$$
 $328 = 320 + 8.$

Число 320 оканчивается нулемъ и потому дѣлится на 2; 7 не дѣлится на 2 и потому 327 не раздѣлится на 2 (если одно изъ двухъ слагаемыхъ дѣлится, а другое не дѣлится на какое-нибудь число, то сумма не раздѣлится на это число). Слагаемое 8 дѣлится на 2, поэтому 328 раздѣлится на 2 (если каждое слагаемое дѣлится на одно и то же число, то и сумма раздѣлится на это число). Изъ этого слѣдуетъ:

Но послѣдияя сумма, по распредѣлительному свойству произведенія (§ 61,a), равна $(a_1+b_1+c_1+...)$ q, слѣд., она дѣлится на q, значить, и сумма a+b+c+... дѣлится на q.

^{*)} Если а дълится, а b не дълится на q, то $a=a_1q$ н $b=b_1q+r$, гдь r есть остатокъ отъ дъленія b на q Тогда $a+b=a_1q+(b_1q+r)$. Послъдняя сумма, согласно сочетательному свойству, равна суммъ a_1q+b_1q+r , которая, по распредълительному свойству произведения, равносильна суммъ $(a_1+b_1)q+r$. Отсюда видно, что при дъленіи суммы a+b на q получается частное a_1+b_1 и остатокъ r Значитъ, сумма a+b не дълится на q.

на 2 дълится только такое число, которое оканчивается нулемъ или четною цыфрою.

112. Признакъ дълимости на 4. Сотня дълится на 4; поэтому сумма какого-угодно числа сотепъ дълится на 4. Всякое число, оканчивающееся двумя нулями, есть сумма пъсколькихъ сотепъ (папр., 1300 есть сумма 13 сотенъ); значитъ, всякое число, оканчивающееся двумя нулями, дълится на 4.

Возъмсмы теперы два числа такихъ, чтобы у одного сумма десятковъ съ единицами не дълилась на 4, а у другого дълилась, напр., 2350 и 2348. Ихъ можно представить въвидъ суммъ такъ:

Число 2300 оканчивается двумя нулями и потому дѣлится на 4; 50 не дѣлится на 4; поэтому 2350 не раздѣлится на 4 (если одно слагаемое дѣлится, а другое не дѣлится, то...); 48 дѣлится на 4; поэтому 2348 раздѣлится на 4 (если каждое слагаемое дѣлится, то...). Изъ этого слѣдуетъ:

- на 4 дълится только такое число, котороз оканчивается двумя нулями или у котораго двъ послъднія цыфры выражаютъ число, дълящееся на 4 *).
- 113. Признакъ дълимости на 8. Тысяча дълится на 8; ноэтому сумма какого-угодно числа лысячь дълится на 8. Значитъ, всякое число, оканчивающееся тремя нулями, дълится на 8.

Возьмемъ теперь два числа такихъ, чтобы у одного сумма сотепъ, десятковъ и единицъ пе дълилась на 8, а у другого дълилась, напр., 78150 и 73152. Ихъ можно представить въ видъ суммъ такъ:

$$73150 = 73000 + 150$$
; $73152 = 73000 + 152$

. Апсло 73000 оканчивается тремя нулями и потому дъ-

 ^(*) Подобных же образомъ можно вывести вналогичный привнакъ дълимости на 25.

лится на 8; 150 не дёлится, а 152 дёлится на 8. Изъ этого заключаемъ, что 73150 не дёлится, а 73152 дёлится на 8. Сл. Д.:

на 8 дълится только таков число, которов оканчивается тремя нулями или у котораго три послъднія цыфры выражаютъ число, дълящееся на 8 *).

114. Признакъ дѣлимости на 5 и на 10. Десятокъ дѣлится на 5 и на 10; поэтому число, составленное изъ десятковъ, т.-е. окапчивающееся нулемъ, дѣлится на 5 и на 10. Если число пе оканчивается нулемъ, то оно не дѣлится на 10, а на 5 оно раздѣлится только тогда, когда послъдняя его цыфра будетъ 5, потому что изъ всѣхъ однозначныхъ чиселъ только 5 дѣлится на 5. Итакъ:

на 5 дълится только такое число, которое оканчивается нулемъ или цыфрою 5;

на 10 дълится только такое число, которое оканчивается нулемъ.

115. Признаки дълимости на 3 и на 19. Предеарительно замътимъ, что и на 3, и на 9 дълится всякое число, написанное посредствомъ только цыфры 9, т.-е. 9, 99, 999 и т. и. Дъйствительно:

Замътивъ это, возьмемъ какое-пибудь число, напр., 2457, и разложимъ его на отдъльныя единицы различныхъ разрядовъ (кромъ простыхъ единицъ, которыя оставимъ пе разложенными):

^{*)} Подобнымъ же образомъ можир вынести аналогичный привнакъ дълимости на 125. 12

Разложимъ каждую тысячу на 999 и 1, каждую сотию на 99 и 1, каждый десятокъ—на 9 и 1. Тогда вмёсто 2 тысячь получимъ 2 раза по 999 и 2 единицы; вмёсто 4 сотенъ получимъ 4 раза по 99 и 4 единицы; вмёсто 5 десятковъ— 5 разъ по 9 и еще 5 ед. Слёд.:

Слагаемыя 999, 99 и 9 дёлятся на 3 и на 9; значить, дёлимость даннаго числа на 3, или на 9, зависить только отъ суммы 2+4+5+7; если эта сумма дёлится или не дёлится на 3, или на 9, то и данное число дёлится или не дёлится на эти числа. Сумма 2+4+5+7 есть сумма чисель, выражаемыхъ цыфрами даннаго числа, написанными отдёльно; для краткости говорять, что это есть сумма цыфръ даннаго числа. Поэтому можемъ сказать:

на 3 дълится только такое число, у котораго сумма цыфръ . дълится на 3;

на 9 дълится только такое число, у котораго сумма цыфръ дълится на 9.

Въ нашемъ примъръ сумма цыфръ равна 18; 18 дълится па 3 и на 9; значить, 2157 тоже дълится и на 3, и на 9. Дъйствительно:

116. Признакъ дѣлимости на 6. Если какоепибудь число дѣлится на 6, то оно должно раздѣлиться и на 2, и на 3, т.-е. на тѣ числа, на которыя дѣлится 6. Дѣйствительно, если какое-нибудь число дѣлится на 6, то, вначить, его можно разложить на шестерки, т.-е. представить его въ видѣ суммы:

Но каждую шестерку можно разложить и па двойки

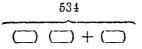
(2+2+2), и на тройки (3+3); значить, и все такое число́ можно разложить и на двойки, и на тройки; слёд., оно́ должно дёлиться и на 2, и на 3.

Изъ этого следусть, что если какое-нибудь число не делится на 2, или не делится на 3, то такое число не можеть разделиться на 6, такъ какъ если бы оно делилось на 6, то разделилось бы и на 2, и на 3. Значить, для того, чтобы какое-нибудь число делилось на 6, необходимо, чтобы оно делилось и на 2, и на 3.

Такимъ образомъ, дѣлимость даннаго числа на 2 и на 3 составляетъ необходимый признакъ дѣлимости этого числа на 6. Разъяснимъ теперь, что этогъ признакъ и достаточенъ, т.-е. что если какое-инбудь число дѣлится на 2 и на 3, то этого достаточно, чтобы оно раздѣлилось на 6*).

Возьмемъ, напр., число 534, которое дълится и на 2, и на 3; разъяснимъ, что оно раздълится и на 6.

Если 534 дёлится на 3, то его можно разложить на 3 равныя части. Предположимъ, что оно разложено на эти части и что 2 части соединены въ одну групну; тогда 534 представится въ видё суммы двухъ слагаемыхътакъ:



Первое слагаемое, состоящее изъ двухъ равныхъ частей, конечно, двлится на 2. Если бы второе слагаемое не двлилось на 2, то тогда и сумма 534 не двлилась бы на 2 (если одно слагаемое двлится, а другое не двлится на какренибудь число, то сумма не раздвлится на это число). Но

^{*)} Чтобы показать, что необлодимый признакъ можеть иногда оказаться недостаточнымь, приведемь следующий примеръ. Если какое-инбудь число делится на 24, то оно делится также и на 4, и на 6; значить, для того, чтобы число делилось на 24 необходимо, чтобы оно делилось и на 4, и на 6. Но втого еще недостаточно: число можеть делиться на 4 и на 6 и въ то изверемя не делиться на 24, напо , 86 делится и на 4, и на 6, но на 24 оно не делится.

534 пълится на 2; значить, и второе слагаемое должно дълиться на 2; а второе слагаемое есть третья часть числа 534; если же третья часть дёлится на 2 равныя части, то исе число делится на 6 радиыхъ частей.

Теперь мы можемъ утверждать, что на 6 дьлится тольно такое число, которое дълится на 2 и на 3.

Напр., число 13854 дълится на 6, такъ какъ оно дълится на 2 (оканчивается четною цыфрою) и въ то же врсия делится на 3 (сумма его цыфръ делится на 3). Действительно: 13854:6=2309.

117. Подобнымъ же образомъ *) можно вывести следуюшіе признаки ділимости на 12, на 18 и на 15:

на 12 пелится только такое число, которое делится на 3 п на 4;

' на 18 делится только такое число, которое делится на 2 и на 9;

на 15 делится только такое число, которое делится на 3 п на 5.

118*. Общій признакъ дѣлимости на 7, на 11 и на 13. Чтобы узнать, дълится ли данное число на 7, или на 11, или на 13, зачерниваютъ въ числѣ три послѣднія цыфры и вычитаютъ каъ оставшагося числа зачеринутов (или наобороть); если остатонъ равенъ 0, или дълится на 7, или на 11, или на 13, то и данное число раздълится на 7, или на 11, или на 13.

.Предварительно заметимъ, что сумма 1000+1 делится и на 7, и на 11, и на 13, въ чемъ можно убъдиться непосредственно деленіемъ. Положимъ, что въ данномъ числе всехъ тысячь a, и b будеть часть его, состоящая изъ сотень, десятковь и единиць; тогда данное число можно представить: a.1000+b, что равно a. 1001+b—a. Если a > b, то последнее выражение можно предстаенть такъ:

$$a \cdot 1001 - (a - b),$$

a . 1001—(a-b), а когда b>a, то оно равносильно выраженію:

$$a:1001+(b-a)$$

^{*)} Съ небольшимъ немвиеніемъ для числа 15.

И въ нервомъ, и во второмъ случав для двлимости числа на 7, или на 11, или на 13, необходимо и достаточно, чтобы разность a-b, или b-a двлилась на 7, или на 11, или на 13, или же равнялась 0, такъ какъ произведение a. 1001 двлится всегда и на 7, и на 11, и на 13.

Пусть, напр., требуется узнать, дълится ли на 7 число 11673207. Зачеркиваемь три послъднія цыфры и изъ оставша-гося числа вычитаемь вачеркнутое:

11673 207 -- 207 -- 11466

Чтобы узнать, дълится ли это число на 7, исступаемь съ

11 466 - 11 455

455 делится на 7; вначить, и данное число делится на 7.

119*. Признакъ дълимости на 87. Чтобы узнать, дълится ли данное число на 37, зачернивають въ числътри послъднія цыфры, и оставшее число складывають съ зачерннутымъ; если полученная сумма дълится на 37, то и данное число раздълится на 37.

Для доказательства замётимь, что разность 1000-1, т.-е. 999, дёлится на 37, въ чемъ можно убёдиться непосредственно. Пусть данное число будеть a. 1000+b, гдё b есть часть, состоящая изъ сотеиъ, десятковъ и единицъ. Тогда данное число можно представить такъ: a. 999+(b+a); такъ какъ произведеніе a. 999 всегда дёлится на 37, то дёлимость даннаго числа на 37 зависить лишь оть суммы b+a.

Важная теорема о дълимости.

120*. **Теорема**. Если произведеніе двухъ чиселъ a_1 , a_2 дѣлится на третье число p, и одно изъ чиселъ a_1 , a_2 не имѣетъ съ p общихъ дѣлителей, кромѣ 1, то другое изъ этихъ чиселъ дѣлится на p.

Пусть a_1 не имбеть сь p общихь делителей, кромв 1; требуется доказать, что a_2 делитея на p.

Предположимъ сначала, что $a_1 > p$. Раздѣлимъ a_1 на p и насовемъ частное и остатокъ отъ этого дѣленія соотвѣтственно́ q и r. Тогда:

$$a_1 = pq + r$$
.

Убъдимся относительно остатка r, что онъ во-1) не равенъ 0 и во-2) не имъетъ общихъ дълителей съ p, кромъ 1. Дъйствительно, если r=0, то a_1 =pq и тогда a_1 дълилось бы на p, и, слъд., числа a_1 и p имъли бы общаго дълителя, отличнаго отъ 1, что противоръчитъ условію теоремы. Предположимъ далье, что p и r имъютъ какого-нибудь общаго дълителя t>1. Тогда a_1 дълилось бы на t и, слъд., a_1 и p имъли бы общаго дълителя t>1, что противоръчитъ условію.

Если r не равенъ 1, то раздѣлимъ p на r; пусть частное и остатокъ отъ этого дѣленія будутъ q_1 и r_1 . Тогда:

$$p=rq_1+r_1$$
.

Такъ какъ p и r суть числа, не имѣющія общихъ дѣлителей, кромѣ 1, то изъ послѣдняго равенства убѣждаемся, подобио предыдущему, что во-1) r_1 не равно 0 и во-2) r и r_1 не имѣють общихъ дѣлителей, кромѣ 1. Если r_1 не равно 1, то рэздѣлимъ r на r_1 , отчего получимъ остатокъ r_2 , не равный нулю и не имѣющій общихъ дѣлителей съ r_1 , кромѣ 1. Если r_2 не равенъ 1, то раздѣлимъ r_1 на r_2 , и т. д.; тогда получимъ рядъ равенствъ:

$$\sigma_1 = pq + r$$
 $p = rq_1 + r_1$
 $r = r_1q_2 + r_2$
 $r_1 = r_2q_3 + r_3$

изъ которыхъ убѣждаемся, что остатки r, r_1 , r_2 п т. д. не равны нумю. Такъ какъ при всякомъ дѣленіи остатокъ долженъ быть меньше дѣлителя, то r < p, $r_1 < r$, $r_2 < r_1$, п т. д. Поэтому, произведя достаточное число дѣленій, мы, наконецъ, дойдемъ до такого остатка, который равенъ 1. Пусть $r_n = 1$. Тогда:

$$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+1$$
.

Умножимъ почленно каждое изъ полученныхъ равенствъ на a_2 :

$$a_{1}a_{2} = pqa_{2} + ra_{2}$$

$$pa_{2} = rq_{1}a_{2} + r_{1}a_{3}$$

$$ra_{2} = r_{1}q_{2}a_{2} + r_{2}a_{2}$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2}a_{2} = r_{n-1}q_{n}a_{2} + a_{2}$$

Обращая впиманіе на первое изъ этихь равенствъ, разсуждаемь такъ: такъ какъ a_1a_2 , по условію, дѣлится на p, то и сумма pqa_2+ra_2 дѣлится на p; первое слагаемое этой суммы дѣлится на p; слѣд., и второе слагаемое т.-е. ra_2 дѣлится на p. Перейдя ватѣмъ къ равенству второму, находимъ, что сумма pa_2 и одно изъ слагаемыхъ $(ra_2)q_1$ дѣлится на p; откуда заключаемъ, что и второе слагаемое, r_1a_2 , дѣлится на p. Перейдя затѣмъ къ равенству 3-му, отъ 3-го къ 4-му, отъ 4-го къ 5-му и т. д., дойдемъ, наконецъ, до послѣдняго равенства, изъ котораго заключимъ, ч т о a_2 д ѣ л и т с я н а p.

Если $a_1 < p$, то мы раздѣлимь p на a_1 , затѣмь a_1 на остатокь; послѣ первый остатокь на второй и т. д.; тогда получимь такія равенства:

$$p=a_1q+r$$
 $a_1=rq_1+r_1$
 $r=r_1q_2+r_2$, к т. д.

120,а*. Слъдствіе 1-е. Произведеніе нъскольнихъ сомножителей: $a_1a_2a_3...a_n$ можетъ дълиться на простое число p только тогда, когда, по крайней мъръ, одинъ изъ сомножителей дълится на p.

Разсматривая данное произведеніе, какъ произведеніе только 2-хъ сомножителей: a_1 и $(a_2a_3...a_n)$, можемъ разсуждать такъ: ссли a_1 не дѣлится на простое число p, то это вначить, что a_1 не имѣетъ съ p общихъ дѣлителей, кромѣ 1; въ такомъ случаѣ, по доказанной теоремѣ, число $a_2a_3...a_n$ должно дѣлиться на p. Подобно этому убѣдимся, что если a_2 не дѣлится

на p, то число $a_3...a_n$ должно дёлиться на p. Продолжая эти разсужденія дал'є, найдемь, что, если ни одно изъ чисель: a_1 , a_2 , $a_3...a_{n-1}$ не дёлится на p, то a_n дёлится на p. Если же какоенибудь изъ чисель: a_1 , a_2 , $a_3...a_{n-1}$ дёлится на p, то теорема не требуеть доказательства.

120,6*. Слъдстві 2-е. Если число a дълится порознь на 2 числа p и q, при чемъ p и q не имъютъ между собою общихъ дълителей, кромъ 1, то a дълится на произведение pq.

Назовемъ частное отъ дѣленія a на p черезъ Q; тогда:

$$a=pQ...(1).$$

Такъ какъ по условію, a дізлится на q, то изъ равенства (1) ваключаемъ, что pQ дізлится на q. Но p не им'єть съ q общихъ дізлителей, кроміз 1; значить, согласно теореміз, Q должно дізлиться на q. Пусть частное отъ этого дізленія будеть Q_1 ; тогда:

$$Q=qQ_1...$$
 (2).

Вставивъ въ равенство (1) на мъсто Q равное ему произведеніе, получимъ:

$$a=p(qQ_1)=(pq)Q_1$$

откуда видно, что число a есть произведеніе двухъ множителей: (pq) и Q_1 ; вначить, a ділится на pq.

Такимъ образомъ: если число дёлится на 2 и на 3, то оно дёлится на 6; если число дёлится па 3 и на 4, то оно дёлится на 12; и т. и.

II. Числа простыя и составныя.

121. Опредъленія *). І) Число, которов дълится только на единицу и на само себя, наз. простымъ (пли перво-

^{*)} Опредвленіем в наз. предложеніе, въ которомі высказывается, какой смысль придается тому или другому на вванію; напр., предложеніе: «ум ноже и і с ссть ариеметическої двиствіе, посредствомь котораго одно данное число повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ данномъ числъ находится единицъ», есть о предвленіе ум ноженія

начальнымъ); таково, напр., число . 7, . которое делится только на 1 и на 7.

2) Число, которое дълится не только на единицу и на само себя, но еще и на другія числа, наз. составнымъ; таково, напр., число 12, которое дълится не только на 1 и на 12, но и на 2, на 3, на 4 и на 6.

Есть 26 простыхь чисель, меньшихь 100, а именно: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Въ концъ этой книги приложена таблица, въ которой выписаны всъ простыя числа, не превосходящія 6000.

122*. Теорема. Всякое составное число делится на некоторое простое число, большее 1.

Пусть N есть накое-нибудь составное число. По опредвленю, N двлится на некоторое число t, бо́льшее 1 и меньшее N. Если t есть число простое, то теорема доказана; если же t число составное, то оно, въ свою очередь, делится на некоторое число t_1 , бо́льшее 1 и меньшее t. Въ такомъ случав и N двлится на t_1 . Если t_1 есть число простое, то теорема доказана; если же t_1 число составное, то оно двлится на t_2 , которое больше 1 и меньше t_1 . Такимъ образомъ, убъдимся, что N двлится на некоторое простое число t_1 , бо́льшее 1.

123*. Теорема. Существуеть безчисленное множество простыхъ чиселъ..

Допустимъ противное, т.-е., что престыхъ чисель ограниченное число. Въ такомъ случать должно существовать наибольшее простое число. Пусть такое число будеть а. Чтобы опровергнуть это допущение, вообразимъ новое число N, составленное по формуль:

$$N=(1.2.3.5.7....a)+1,$$

т.-е. вообразимъ такое число N, которое получится, если перемножимъ всё простыя числа отъ 1 до a и къ произведенію приложимъ еще 1. Такъ какъ N, очевидно, больше a, и a, согласно предположенію, есть наибольшее изъ простыхъ чиселъ, то N дол-

124*. Составление ряда послъдовательныхъ простыхъ чиселъ. Самый простой способъ составленія ряда последовательныхъ простыхь чисель состоить вь томь, что изъ ряда натуральных чисель оть 1 до а (число, которымъ ють ограничить рядь) выключають сначала всв числа, двиящіяся на 2, потомъ всё числа, денящіяся на 3, затемь всь числа, дълящіяся на 5, на 7, на 11 и т. д. Это дълается очень просто: выписавъ рядъ нечетныхъ чисель оть 1 до а. вачеркивають вы немы каждое 3-е число послё 3-хы, кажное 5-е число посив 5, каждое 7-е посив 7-ми и т. д. Для объясненія этого пріема предположимь, что желають зачеркнуть всь составныя числа, дълящіяся на 7. Наименьшее число, дълящееся на 7, есть само 7. Но 7 простое число и потому не должно быть вачеркнуто. Такъ какъ нечетныя числа отличаются одно отъ другого на 2, то следующія за 7-ю числа будуть: 7+2, 7+(2.2), 7+ (2.3), 7+(2.4) и т. д. Изъ нихъ первое число, дълящееся на 7, есть 7+(2.7); это будеть 7-е число послъ 7. Также только 7-е число, сийдующее ва 7+(2.7), будеть дилиться на 7; однимъ словомъ, кратнымъ 7 будеть каждое 7-е число послъ 7 и никакое иное.

Описанный пріємъ изв'єстень подъ именемъ рѣшета Эратосена (cribrum Eratosthenis). Александрійскій математикъ Эратосень, жившій въ 3-мъ вѣкѣ до Р. Хр., писаль числа на дощечкѣ, покрытой воскомъ, и прокалываль дирочки надъ тѣмп числами, которыя дѣлятся на 2, на 3, на 5 и т. д.; отъ этого дощечка уподоблялась рѣшету, сквозь которое какъ бы просѣнвались составныя числа.

 Въ настоящее время имъются таблицы всъхъ послъдовательныхъ простыхъ чиселъ, меньшихъ 9 000 000 *).

III. О дълителяхъ составного числа.

125. Разложеніе составного числа на простыхъ множителей. Разложить составное число на простыхъ множителей значить представить его въ видъпроизведенія нъскелькихъ простыхъ чиселъ. Напр., разложить 12 на простыхъ множителей значить представить 12 такъ: 12=2.2.3.

Пусть требуется разложить на простыхъ множителей какое-пибудь составное число, напр., 420. Для этого находимъ, по признакамъ дёлимости, наименьшее простое число (кромѣ 1), на которое дёлится 420. Такое число есть 2; раздёлимъ 420 на 2: .

$$420:2=210;$$
 откуда: $420=210.2$ (1).

Теперь находимъ наименьшее простое число (кромѣ 1), на которое дѣлится составное число 210. Такое число есть 2; раздѣлимъ 210 на 2:

Замінимь въ равенстві (1) число 210 равнымь ему про-

$$420 = 105 \cdot 2 \cdot 2$$
 (2).

Наименьшее простое число, на которое дѣлится составное число 105 (кромѣ 1), есть 3; раздѣлимъ 105 на 3:

$$105:3=35$$
; откуда: $105=35.3$.

Заменимъ въ равенстве (2) число 105 равнымъ ему про-

$$420 = 35 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$
 (3)

^{*)} Наибольшее простое число, извъстное до сего времени, есть $261-1=2\,305\,843\,009\,213\,693\,951;$ вто число было найдено священникомъ, о, Јориномъ Первущинымъ въ 1888 г.

.. Наименьшее простое число (кромъ 1), на которое дълится составное число 85, есть 5; раздъливъ 85 на 5, находимъ 7; впачить, 35=7.5. Замёнимь въ равенстве (3) число 35 равнымъ ему произведениемъ 7.5, получимъ: きょうけい せいじゅうし

Это и будеть требуемое разложение, такъ какъ всь сомножители числа простыя.

Такъ какъ произведение не измъняется отъ перемъны мъсть множителей, то можно писать ихъ въ какомъ угодно порядкъ: обыкновенно пишуть ихъ отъ меньшихъ къ большпмъ, т.-е. такъ: 420=2.2.3.5.7

- 126. Какъ располагаютъ разложеніе. Разложение на простыхъ множителей располагають на письм'в обыкновенио такъ: (
 - т.-е. пишуть данное составное число и проводять 420|2
 - 210/2 справа отъ него вертикальную черту. Справа отъ 105 3 черты помъщають наименьшее простое число, на

 - которое дълится данное составное, и дълять на 35 5
 - него это данное число. Цыфры частнаго под-
- писывають подъ дёлимымъ. Съ этимъ частнымъ поступають такъ же, какъ съ даннымъ числомъ. Действія продолжають до тёхь норь, пока вь частномь не получится 1. Тогда всё числа, стоящія направо оть черты, будуть простыми множителями даннаго числа.

Возьмемъ еще слъдующій примъръ:

- 8874 2 . Дойдя до частнаго 493, мы ватрудняемся ръ-
- шить, на какое число опо дълится. Въ такихъ 4437 3
- 1479 3 случалхъ обращаемся къ таблицъ простыхъ
 - чисель (въ концъ этой книги). Если въ ней 493 17
 - 29 29 встретится число, поставившее насъ въ затруд-
- неніе, то опо д'влится только на само себя. 493 не находится въ таблица простыхъ чисель; вначить, это число-составное "и "потому /должно делиться на какое-

нибудь простое число, большее 1. Пробуемъ дълить его на 7, на 11, на 13... и т. д. до тъхъ поръ, пока не дойдемъ до дъленія безъ остатка. Оказывается, что 493 дълится на 17, при чемъ въ частномъ получается 29. Теперь можемъ окончить разложеніе.

- 127. Ибкоторые частные случая разложение женія. Укажемь 2 случая, въ которыхь разложение упрощается.
- 1) Если данное составное число не велико, то его множителей прямо выписывають въ строку. Напр.:

При этомъ говорять такъ: 72 равно 2, умноженнымъ на 36 (2 ппшемъ, а 36 запоминаемъ); 36 равно 2, умноженнымъ на 18 (2 ппшемъ, а 18 запоминаемъ); 18 равно 2, умноженнымъ на 9; и т. д.

2) Если данное число легко разлагается на какихънибудь составныхъ множителей, то разлагають его сначала на этихъ множителей, а потомъ каждаго изъ нихъразлагають на простыхъ. Папримъръ:

14000=1000.14=10.10.10.14=2.5.2.5.2.5.2.7.

Замѣчаніе. Когда въ разложеніи одинъ и тоть же множитель повторяется нѣсколько разъ, то можно писать сокращенно, употребляя то обозначеніе с т е п е н и, которое мы указали прежде (§ 62). Такъ, вмѣсто строки: 14000=2.2.2.2.5.5.5.7. пишуть короче:

$$14000=2^4.5^3.7.$$

Здёсь поназатели степени 4 и 3, поставленные надъ числами 2 и 5, означають, сколько разъ эти числа должны быть новторены множителями.

128. Важное свойство разложенія. Всякое составное число разлагается только въ одинъ рядъ простыхъ иножителей: Напр; число 14000, какимъ бы способомъ мы его не разлагали на простыхъ множителей, всегда даетъ такой рядъ, въ которомъ множитель 2 повторяется 4 раза, множитель 5 повторяется 3 раза, а множитель 7 входитъ только одинъ разъ (конечно, множители эти могутъ стоять въ какомъ угодно порядкъ).

 $128,a^*$) Доказательство этого свойства. Допустимъ, что какоенибудь число N дало два ряда простыхъ множителей:

$$N=abc...$$
 M $N=a_1b_1c_1...$

(въ обоихъ рядахъ множители могутъ поеторяться).

Tогда:
$$abc...=a_1b_1c_1...$$

Лѣвая часть послѣдияго равенства дѣлится на a; значить, и правая часть должна дѣлиться на a. Но a число простое, поэтому произведеніе $a_1b_1c_1...$ только тогда раздѣлится на a, когда одинъ изъ его множителей дѣлится на a (§ 120,a); но простое число можеть дѣлиться на другое простое число, отличное отъ 1, только тогда, когда эти простыя числа одинаковы. Значить, одно изъ чисель: a_1 , b_1 , c_1 ... равняется a. Пусть $a_1 = a$. Раздѣливъ обѣ части равенства на a, получимъ:

$$bc...=b_1c_1...$$

Подобно предыдущему, убѣдимся, что одипъ изъ множителей: b_1, c_1, \ldots равенъ b. Пусть $b_1 = b$; тогда $cd \ldots = c_1d_1 \ldots$ Продолжая эти разсужденія далье, увидимъ, что всѣ множители перваго ряда входятъ также и во второй рядъ. Раздѣливъ обѣ части равенства на a_1 , убѣдимся, что въ первомъ ряду есть множитель a_1 . Такимъ образомъ, подобно предыдущему, найдемъ, что всѣ множители второго ряда входятъ и въ первый рядъ. Отсюда слъдуетъ, что оба эти ряда могутъ отличаться только порядкомъ множителей, а не самими множителями,—другими словами, что эти два ряда представляютъ на самомъ дѣлѣ только одинъ рядъ.

129. Опредъление Если одно число дълится з на другое безъ остатка, то это другое инсло наз. дълителемъ

перваго числа. Напр., 40 дълится на 8 бозъ остати: вслъдствіе этого мы можемъ число 8 назвать дълигелемъ числа 40.

Всякое простое число, напр., число 11, имбеть только двухъ делителей: 1 и само себя.

Всякое составное число имѣеть болѣе двухъ двлителей; напр., число 6 имѣеть 4-хъ дѣлителей: 1, 2, 3 и 6; изъ нихъ первые три—простые, а послѣдній—составной.

129, а. Нажожденіе цълителей. Пусть требуется найти дълителей числа 420. Для этого разложимь это число на простыхъ множителей:

$$420=2.2.3.5.7.$$

На каждаго изъ отихъ простыхъ множителей число 420 дълится безъ остатка; напр., 420 дълится на 5, потому что 420 можно представить въ видъ произведенія: (2.2.3.7).5=84.5. Значитъ, всъ простые множители составного числа служатъ также и его простычи дълителями.

Чтобы найти составных разлителей, примсы во вниманіе, что множителей произведенія можно соединять въ различныя группы (§ 61). Соединимь ихъ, положимь, такъ:

$$420 = (2.3) \cdot (2.5.7) = 6.70.$$

Теперь 420 представляеть собою произведение двухъ множителей: 6 и 70; слёд., 420 дёлится и на 6, и на 70. Соединяя множителей въ иныя группы, увидимъ такимъ же образомъ, что 420 дёлится на произведение какихъ угодно своихъ простыхъ множителей.

Правило. Чтобы найти дълителей даннаго составного числа, предварительно разлагаютъ его на простыхъ множителей; каждый изъ этихъ множителей будетъ простымъ дълителемъ даннаго числа; составные же дълители получаются перемножениемъ простыхъ множителей по два, по три, по четыре и т. д.

[▲] Инселент **≜**опемстию

- 120. Замѣчаніе. Чтобы найти частное оть діленій составного числа на какого-нибудь его ділители, достаточно изъ разложенія составного числа выключить тіхъ множителей, которые входять въ ділители, и оставнихся множителей перемножить. Напр., чтобы пайти частное оть діленія 420 на 70, изъ разложенія 420=2 2.3.5.7 выбросимъ множителей 3, 5 и 7, произведеніе которыхъ составляеть 70, и оставніеся множители 2 и 3 перемножимъ (получимъ 6).
 - 131*. Теорема. Если N есть дълитель числа P, то всъ простые множители, на нотсрые разлагается N, входять также и въ разложение числа P.

Назвавъ частное отъ дъленія N на P черезь \mathcal{U} , получимъ: N=PQ. Разложнить числа P и Q на простыхъ множителей и вставимъ въ равенство N=PQ на мъсто P и Q ихъ разложенія; тогда мы получимъ разложеніе числа N. Такъ какъ другого разложенія число N не имѣетъ, то ваключаемъ, что всѣ простые множители P входять въ разложеніе числа N.

Слѣдствіе. Составное число не можеть ишьть иныхь дълителей, кромъ тъхъ, которые получаются по правилу предыдущаго параграфа.

IV. Общій наибольшій ділитель.

132. Опредълентя. 1) Общимъ наибольшимъ дълителемъ нъсколькихъ чиселъ называется самое большое число, на которое дълятся всъ эти числа.

Напр., общій наибольшій ділитель трехь чисель: 18, 30 и 24 есть 6, потому что 6 есть самоє большое число, на которое ділятся всё: эти числа.

• 12) Два числа, для которыхъ общій наибольшій дълитель весть 1, наз. взаимно простыми (или первыми между собою). Таковы, напр.: числа 14:и 15. - Укажемъ два способа нахожденія общаго напб. дѣлателя пъсколькихъ чисель.

Способъ І-й: посредствомъ разложенія на простыхъ сомножителей.

133. Пусть требуется найти общаго наиб. дълителя двухь чисель: 180-и и 126-и. Для этого предварительно разложимь эти числа на простыхъ мпожителей:

Сравинвая между собою множителей этихъ чиселъ, замъчаемъ, что между ними есть общіе, а именно: 2, 3, 3. Кандый изъ этихъ общихъ множителей будетъ и общимъ дълителемъ 180-и и 126-и. Чтобы получить составныхъ общихъ дълителей, надо перемножить общихъ множителей по два и по три. Наибольшій общій дълитель, очевидно, получится, если перемножимъ всёхъ общихъ множителей:

Пусть еще требуется найти общаго найбольшаго дълителя трехъ чиселъ: 210, 1260 и 245. Разложимъ эти числа на простыхъ миожителей:

21 0	2	1260	2	245	5
105	3	63 0	2	49	7
35		315	3	7	7
7	7	105	3	•	
		8 5	5		
		7	7.		

Теперь видимъ, что общій наиб. дѣлитель этихъ чисель равенъ произведенію общихъ множителей 5 и 7, т.-е равенъ 35.

Правило. Чтобы найти общаго наибельшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ, разлагаютъ эти числа на простыхъ множителей и перемножаютъ между собою тѣхъ изъ зътихъ множителей, которые общи всѣмъ числамъ. Способъ 2-й: посредствомъ послъдовательнаго дъленія.

134. Сначала укажемъ этотъ способъ въ примъненіи къ двумъ даннымъ числамъ, а потомъ къ тремъ и болъе.

Въ примънении къ двумъ даннымъ числамъ способъ послъдовательнаго дъления основанъ на слъдующихъ двухъ истинахъ:

1) Если большее изъ двухъ данныхъ чиселъ дълится на меньшее, то меньшее изъ нихъ есть общій наибольшій дълитель.

Напр., возъмемъ два числа: 54 и 18, поъ которыхъ большее дълится на меньшее. Такъ какъ 54 дълится на 18 и 18 дълится на 18, то, значитъ, 18 есть общій дълитель чиселъ 54 и 18. Эготъ дълитель есть въ то же время и наибольшій, потему что 18 не можетъ дълиться ни на какое число, большее 18.

2) Если большее изъ двухъ данныхъ чиселъ не дѣлится на меньшее, то ихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ сбщему наибольшему дѣлителю другихъ двухъ чиселъ, а именно меньшаго изъ данныхъ чиселъ и остатка отъ дѣленія большаго изъ нихъ на меньшее.

Пусть, напр., даны два числа: 85 и 30, изъ которыхъ большее не дёлится на меньшее. Раздёливъ первое на второе, получимъ: 85:30=2 (ост. 25), тогда общій наибольшій дёлитель чиселъ 85 и 30 долженъ быть также общимъ наибольшимъ дёлителечъ другихъ двухъ чиселъ, а именно: 30 и 25 (это есть 5).

*Объясненіе. Такъ какъ дёлимое равно дёлителю, умноженному на частное, плюсъ остатокъ, то

$$85 = (30.2) + 25.$$

Теперь число 85 представляется намъ, какъ сумма двухъ слагаемыхъ: одно слагаемое равно произведению 30.2, а другое 25. Замфтивъ теперь, что если число 30 дълится на какія-нибудь

числа, то и произведение 30.2 (т.-е. сумма 30+30) раздълится на эти числа, мы можемъ изъ написаннаго выше равенства вывести такія два заключенія:

- 1) всй общіе дёлители чисель 85 и 30 дёлять сумму (85) и одно слагаемое (30.2); впачить, они должны дёлить и другое слагаемое (25), такъ какъ если бы другое слагаемое не раздёлилось, то не раздёлилась бы и сумма (§ 110, 2);
- 2) всё общіе дёлители чисель 30 и 25 дёлять каждое слагаемое (30.2 и 25); поэтому они должны дёлить и сумму (85).

Значить, двъ пары чисель: (85 и 30) и (30 и 25) имъють однихъ и тъхъ же общихъ дълителей; слъд., у нихъ долженъ быть одинъ и тоть же общій наибольшій пълитель.

Посмотримъ тенерь, какъ можно пользоваться этими истинами для нахожденія общаго наиб. дълителя двухъ чиселъ. Пусть требуется найти общаго наибольша-

го дёлителя чисель 391 и 299. Раздёлимь 391 на 299, чтобы узнать, не будеть ли 299 общимь наиб. дёлителемъ (на основаніи истины 1-ой). Видимъ, что 391 не дёлится на 299, поэтому 299 не есть общій наиб. дёлитель. На основаніи исти-

ны 2-й утверждаемъ, что общій наиб. дѣлитель чиселъ меньз91 и 299 есть также общій наиб. дѣлитель чиселъ меньшихъ, а именно: 299 и 92. Станемъ искать общаго
наиб. дѣлителя этихъ чиселъ. Для этого дѣлимъ 299 на
92, чтобы узнать, не будетъ ли 92 общимъ наиб.
дѣлителемъ (истина 1-я). Видимъ, что 92 не есть общій
наиб. дѣлитель. Теперь опять, на основаніи истины 2-ой,
утверждаемъ, что общій наиб. дѣлитель чиселъ 299 и 92
есть также общій наиб. дѣлитель чиселъ 299 и 92
есть также общій наиб. дѣлитель чиселъ 299 и 92
веть общій наиб. дѣлитель чисель 299 и 92
веть общій наиб. дѣлитель чисель 299 и 92, и 23. Станемъ искать этого дѣлителя. Для
этого дѣличъ 92 на 23. Видимъ, что 23 есть общій
наиб. дѣлитель пары чисель 92 и 23, слѣд., и пары
чесель 299 и 92, слѣд., и пары данныхъ чисель 391 и 299.

Правило 1-е. Чтобы найти общаго наибольщаго дѣлителя двухъ чиселъ, дѣлятъ бо́льшее изъ нихъ на меньшее, потомъ меньшее на первый остатонъ, затѣмъ первый остатонъ на второй, второй на третій и т. д. до тѣхъ поръ, пона не получится въ остаткъ 0; тогда послѣдній дѣлитель будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.

Способъ этотъ (называемый способомъ послёдовательнаго дёленія) полезно примёнять тогда, когда данпыя чесла не легко разлагаются на простыхъ миожителей.

135. Пусть теперь данных чисель будеть болье 2-хь. Напр., положимь, что требуется найти общаго напб. дълителя трехь чисель: 78, 130 п 195. Для этого найдемь сначала общаго напб. дълителя какихь-нибудь двухъ пръ нихъ, напр., 78-ми п 130:

Теперь отыщемъ общаго панбольшаго дѣлителя 26-и и третьяго даннаго числа 195-и:

26 2 Действительно, число 26, будучи общимъ
0 наиб. делителемъ 130-и и 78-и, должно содержать въ себе всехъ простыхъ множителей

общихъ этимъ числамъ; число 13, будучи общимъ наиб. дълителемъ 26-и и 195-и, должно содержать въ себъ всъхъ иростыхъ, множителей, общихъ этихъ числамъ. "Слъд., число 13 содержитъ въ себъ всъхъ простыхъ множителей, общихь всёмь тремь числамь; 130, 78 и 195; значить 13 есть общій наиб. дёлитель этихь чисель.

Если бы, кромѣ указанныхъ трехъ чиселъ, имѣлось еще 4-е данное число, то надо было бы такимъ же путемъ пайти общаго наиб. дѣлителя 13-и и этого 4-го числа, и т. д.

Правило 2-е. Чтобы найти способомъ послъдовательнаго дъленія общаго найб. дълителя нъснолькихъ чиселъ, находятъ сначала общаго найб. дълителя какихъ-нибудь двухъ изъ нихъ, затъмъ — общаго найб. дълителя найдейнаго дълителя и какого-нибудъ третьяго даннаго числа, далье—общаго найб. дълителя послъдняго дълителя и четвертаго даннаго числа, и т д.

V. Наименьшее кратное число.

186. Опредъленія. І) Кратнымъ числомъ даннаго числа наз. всякое число, которое дълится на данное безъ остатка.

Такъ, для числа 9 кратными числами будутъ: 9, 18, 27, 36 к т. д. Для каждаго даниаго числа можно найти безчисленное миожество кратныхъ чиселъ; стоитъ только данное число умножить на 1, на 2, на 3, на 4 к т. д.

2) Общимъ наиненьшимъ кратнымъ (или просто наименьшимъ кратнымъ) числомъ нѣсколькихъ чиселъ называется самое меньшее число, которое дѣлится на каждом иаъ этихъ чиселъ.

Такъ, для трехъ чисель: 6, 15 и 20 общее наименьшее кратное есть 60, такъ какъ меньше 60-и никакое число не делится на 6, на 15 и на 20, а 60 делится на эти числа.

Укажень два способа для нахожденія наименьшаго кратнаго ивскольких данных чисель.

186,а. Способъ 1-й: посредствомъ разложенія на простыхъ сомножителей. Пусть требуется найти наименьшее кратное чисель: 100, 40 и 35. Для этого разложимъ каждое изъ этихъ чисель на простыхъ множителей:

$$100=2.2.5.5; 40=2.2.2.5; 35=5.7.$$

Чтобы какое-инбудь число дёлилось на 100, на 40 и на 35, необходимо, чтобы въ него входили всё простые множители этихъ дёлителей. Вынишемъ всёхъ множителей числа 100 и добавимъ къ нимъ тёхъ множителей числа 40, которыхъ недостаетъ въ разложеніи 100. Тогда получимъ произведеніе 2.2.5.5.2, которое дёлится и на 100, и на 40. Добавимъ теперь къ этому произведенію тёхъ множителей числа 35, которыхъ въ произведеніи недостаетъ. Тогда получимъ произведеніе:

$$2.2.5.5.2.7 = 1400$$

£.,

дълящееся и на 100, и на 40, и на 35. Это и есть напменьшее кратное число, потому что, выключивъ изъ него хотя бы одного сомпожителя, мы получимъ число, которое не раздълится на какос-инбудь изъ данныхъ чиселъ.

Правило. Чтобы найти наименьшее кратное нъсколькихъ чиселъ, разлагаютъ всъ эти числа на простыхъ множителей; затъмъ, взявъ одно изъ нихъ, приписываютъ къ нему недостающихъ простыхъ множителей изъ другого числа; къ этому произведению приписываютъ недостающихъ простыхъ множителей изъ третьяго числа, и т. д.

Замѣчаніе. Найдя наименьшее общее кратное и помноживъ его на какое-угодно число, мы получимъ тоже общее кратное, но не наименьшее. Напр., для чиселъ 100, 40 и 35 общими кратными, помимо 1400, будутъ:

1400 . 2=2800; 1400 . 3=4200; 1400 . 4=5600 и т. д.

137. Нѣкоторые особые случаи. Разсмотримъ два случая, въ которыхъ наименьшее кратное можетъ быть найдено весьма просто.

Случай 1-й, когда никакая пара данныхъ чиселъ не имъетъ общихъ множителей. Пусть, напр., даны три числа: 20, 49, 83, изъ которыхъ, какъ видио изъ разложеній:

никакая пара не имъеть общихъ множителей. Примъняя къ этому случаю общее правило, мы придемъ къ заключению, что всъ данкыя числа надо перемножить:

Такъ же надо поступить, когда отыскивается наименьшее кратное простыхъ чисель; напр., наим. кратное чиселъ 3, 7 и 11 равно: 3.7.11=231.

Случай 2-й, когда большее изъ данныхъ чиселъ дёлится на всё остальныя. Тогда паибольшее число и есть наим. кратное. Пусть, напр., даны четыре числа: 5, 12, 15 и 60, изъ которыхъ большее 60 дёлится на 5, на 12 и на 15; такъ какъ опо при этомъ, конечно, дёлится и на само себя, то оно и есть наименьшее кратное.

138. Способъ 2-й: посредствомъ нахожденія общаго наиб. дѣлителя. Пусть требуется найти наим. кратное двухъ чисель: 391 и 299. Находимъ (последовательнымъ дѣленіемъ) ихъ общаго наиб. дѣлителя; онъ равенъ 23 (см. стр. 117). Теперь раздѣлимъ какоеннбудь изъ данныхъ чиселъ, напр., 299, на 23; получимъ 13. Умножимъ на 13 другое данное число, т.-е. 391; получимъ 5083. Это и есть наим. кратное чиселъ 391 и 299.

Дъйствительно, частное 299: 23 должно содержать въ себъ всъхъ тъхъ простыхъмножителей числа 299-и, которые не входять въ 391; ноэтому произведение этого частнаго на 391 должно содержать въ себѣ всѣхъ простыхъ множителей числа 391 и еще тѣхъ простыхъ множителей числа 299, которые не входять въ составъ числа 391, а это, какъ мы внаемъ, и должно составить наим. кратное чиселъ 391 и 299.

Правило I-е. Чтобы найти наименьшее кратное двухъчиселъ, находятъ ихъ общаго наибольшаго дълителя, дълятъ на него одно изъ чиселъ и на полученное частное умножаютъ другое число.

Пусть теперь требуется найти наим. кратное, трехъ чиселъ: 391, 299 и 85. Находимъ спачала наим. кратное какихъ-нибудь двухъ изъ нихъ, папр., 391 и 299. Это будетъ, какъ мы видъли, 5083. Теперь находимъ наим. кратное числа 5083 и третьяго даннаго числа 85. Общій наиб. дълитель этихъ чиселъ (пайденный способомъ послъдовательнаго дъленія) есть 17. Частное 85:17 равно 5; произведеніе 5083.5 составляетъ 25415. Это и будетъ наим. кратное трехъ данныхъ чиселъ.

Правило 2-е. Чтобы найти наименьшее кратное насислькихъ чиселъ, сначала находятъ наим. кратное какихънибудь двухъ изъ нихъ, потомъ—наим. кратное этого наим. кратнаго и какого-иибудь третьяго даннаго числа, затъмъ—наим. кратное этого наим. кратнаго и четвертаго даннаго числа, и т. д.

Способъ этотъ примъняють тогда, когда данныя числа не легко разлагаются на простыхъ множителей.

ОТДЪЛЪ ЧЕТВЕРТЫИ.

Обыкновенныя дроби.

1. Основныя понятія.

139. Доли единицы. Если какую-вибудь единицу, напр., аршинъ, раздълимъ на нъсколько равныхъ частей, то каждая часть получаеть названіе, указывающее, сколько такихъ частей содержится въ цълой единицъ. Такъ, когда единица раздълена на 12 равныхъ частей, то каждая часть называется двънадцатою частью; раздъливъ единицу на 40 равныхъ частей, получимъ с с р о к о вы я части; и т. п.

Вторая часть называется ниаче половиной, третья часть—третью, четвертая часть—четвертью.

Части единицы, получаемыя отъ дъленія ея на иъсколько равныхъ частей, обыкновенно называются долями единицы.

140. Дробное число. Одна доля или собраніе нѣсколькихъ одинаковыхъ долей единицы называется дробью.

Напр.: 1 десятая, 3 пятыхъ, 12 седьмыхъ суть дроби. Цълсе число вмъстъ съ дробью составляетъ смъшаннов число; напр., 3 цълыхъ 7 восьмыхъ.

Дроби и сибшанныя числа называются дробными числами въ отличіе отъ цѣлыхъ чиселъ, составленныхъ изъ цѣлыхъ единицъ.

141. Изображеніе дробнаго числа. Принято изображать дробь такь: пишуть число, показывающее,

сколько долей содержится въ дроби; подъ нимъ проводять черту, горизоптальную или наклопную; подъ чертою ставять другое число, показывающее, на сколько равныхъ частей раздълена единица, отъ которой взята дробь. Напр., дроби 3 пятыхъ и 1 восьмая изображаются такъ:

$$\frac{3}{b}$$
 HIM $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{8}$ HIM $\frac{1}{8}$.

Число, стоящее надъ чертою, называется числителемъ; оно показываетъ число долей, изъ которыхъ составлена дробь. Число, стоящее подъ чертою, называется знаменателемъ; оно означаетъ, на сколько равныхъ частей была раздълена единица. Оба эти числа вмъстъ называются членами дроби.

Смѣшанное число изображають такъ: пишуть цѣлое число и къ нему, съ правой сторопы, приписывають дробь; напр., число три и двѣ седьмыхъ изображается такъ: $3\frac{2}{1}$, или $3^2/_{7}$.

142. Полученіе дробных в чисель при измітреніи. Положимь, мы желаемь измітрить какуюнибудь длину помощью вершка; допустимь, что вершокь вь этой длині укладывается 7 разь, при чемь получается остатокь, меньшій вершка. Чтобы измітрить этоть остатокь, подыскиваемь такую долю вершка, которая, если возможно, уложилась бы въ остаткі безь новаго остатка. Пусть окажется, что восьмая доля вершка укладывается вь остаткі ровно 5 разь. Тогда говоримь, что измітряемая длина равна 75/в вершка.

Подобио этому, дробныя числа могуть получаться при измѣреніи вѣса (напр., $2^1/_4$ зол.), при измѣреніи времени (напр., $^7/_{10}$ часа), и т. п.

Такимъ образомъ, всякое дробное число (равно какъ и всякое цълое) можно разсматривать, какъ результать измъренія. Число (цёлое или дробное) наз. именованнымъ, если оно сопровождается названиемъ той единицы, которая употреблялась при измёрении, или доли которой употреблялись при измёрении, папр., ³/₄ вершка; въ противномъ случаё число наз. отвлеченнымъ, напр. ³/₄.

143. Полученіе дробных чисель при разложеніи цёлаго числа на равныя части. Пусть требуется раздёлить 5 яблокь на 8 равных частей, напр., требуется распредёлить их между 8 учениками поровну. Мы можемь выполнить это распредёленіе такь: разрёжемь одно яблоко на 8 равных частей и дадимь каждому ученику по одной части; затёмь сдёлаемь то же самое со вторымь яблокомь, третьимь и т. д. Тогда каждый ученикь получить по 5 восьмых яблока. Значить, восьмая ч. ть 5-и яблокь равна 5/8 яблока и вообще восьмая часть 5 каких нобудь единиць равна 5/8 одной единицы.

Возьмемъ еще другой примъръ: пусть требуется уменьшить въ 5 разъ число 28, т.-е. требуется вмъсто 28-и взять пятую часть 28-и. Найти пятую часть 28-и мы можемъ такъ: пятая часть одной единицы есть $^{1}/_{5}$; пятая часть другой единицы есть также $^{1}/_{5}$; если такимъ образомъ возьмемъ по пятой части отъ каждой изъ 28 единицъ, то получимъ $^{28}/_{5}$.

Правило. Чтобы уменьшить цтлое число въ нтсколько разъ, достаточно взять это число числителемъ дроби, а знаменателемъ написать другое число, показывающее, во сколько разъ уменьшается цтлое число.

144. Равенство и неравенство дробныхъ чиселъ. Два дробныя числа считаются равными, если значенія величины, выражаемыя этими числами, при одной и той же 'единицѣ измѣренія, равны между собою. Такъ, мы говоримъ, что 3/4 = 6/8; этимъ мы хотимъ сказать, напр., что двѣ длины, изъ которыхъ одна составляеть 3/4 аршина,

а другая— % аршина, равны между собой; или что два вёса, изъ которыхъ одинъ равенъ %/4 фунта, а другой : %/8 фунта, равны между собою, и т. н.

Изъ двухъ неравнихъ чиселъ бо́льшимъ считается то, которое выражаетъ бо́льшее значеніе величины при одной и той же единицъ измъренія. Такъ, если мы го́воримъ, что $^{1}/_{5}>^{1}/_{8}$, мы желаемъ этимъ выразить, что, напр., $^{1}/_{5}$ фунта больше $^{1}/_{8}$ фунта, $^{1}/_{5}$ часа, и т. п.

- 145. Дробь правильная и неправильная. Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, наз. правильною; дробь, у которой числитель больше знаменателя или равень ему, наз. неправильною. Очевидио, правильная дробь меньше 1, а неправильная больше ем или равна ей; напр., $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{8}{8}$.
- 146. Обращеніе цълаго числа въ неправильную дробь. Всякое цѣлое число можно выравить въ какихъ угодно доляхъ единицы. Пусть, напр., требуется выразить 8 въ двадцатыхъ доляхъ. Въ одной единицѣ заключается 20 двадцатыхъ; слѣд., въ 8 единицахъ ихъ будетъ 20×8, т.-е. 160. Значитъ:

$$8 = \frac{20.8}{20} = \frac{160}{20}$$

Подобнымь образомь, число 25 вь четвертыхь доляхь выразится $\frac{100}{4}$, число 100 вь семпадцатыхь доляхь выразится $\frac{1700}{17}$, и т. и.

Правило. Чтобы обратить цълое число въ неправильную дробь съ даннымъ знаменателемъ, умножаютъ это цълое число на знаменателя и молученное произведение берутъ числителемъ искомой дроби, а знаменателемъ пишутъ даннаго внаменателя.

Замѣчаніе. Цёлое число иногда бываеть полезно изобразить въ видѣ такой дроби, у которой числитель равень этому чёлому числу, а внаменатель есть 1. Такъ вмёсто 5 иншуть пногда 5/1. Чтобы придать смысль такимъ выраженіямъ, условливаются, что раздёлить единицу па одну равную часть значить оставсть единицу безъ измёненія.

147. Обращеніе смішаннаго числа въ неправильную дробь. Пусть требуется обратить смішанное число 83/5 въ неправильную дробь. Это значить: узнать, сколько пятыхъ долей заключается въ 8 цількъ единицахъ вмість съ 3-мя пятыми долями той же единицы. Въ 8 единицахъ пятыхъ долей содержится 5×8, т.-е. 40; значьть, въ 8 ед. вмість съ 3-мя пятыми ихъ будеть 40+3, т.-е. 43. Итакъ, 83/5=43/5. Подобно этому:

$$3\frac{7}{8} = \frac{8 \cdot 3 + 7}{8} = \frac{31}{8}; \quad 10\frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 10 + 1}{4} = \frac{41}{4}; \quad 10\frac{1}{4} = \frac{25 \cdot 7 + 9}{7} = \frac{177}{7}.$$

Правило. Чтобы обратить сившанное число въ неправильную дробь, умножають цёлое число на знаменателя и къ произведенію прибавляють числителя; полученное отъ этого число беруть числителемъ искомой дроби, а знаменателя оставляють прежняго.

148. Обращение неправильной дроби въ смѣщанное (или въ цѣлое) число. Пусть требуется обратить неправильную дробь 100/8 въ смѣщанное число, или, какъ говорять иногда, пусть требуется изъ неправильной дроби 100/8 исключить цълое число. Это вначить: узнать, сколько въ этой неправильной дроби ваключается цѣлыхъ единиць и сколько еще восьмыхъ долей, не составляющихъ сдиницы. Такъ какъ единица ваключаетъ въ себъ 8 госьмыхъ, то въ 100 восьмыхъ содер-

жатся въ 100 восьмыхъ. 8 восьмыхъ въ 100 восьмыхъ содержатся 12 разъ, при чемъ 4 восьмыхъ остаются. Значитъ, 100 восьмыхъ содержатъ 12 цёлыхъ единицъ и еще 4 восьмыхъ доли. Итакъ:

$$\frac{100}{8} = 12 \frac{4}{8}$$

Подобно этому:
$$\frac{59}{8} = 7 \frac{3}{8}$$
; $\frac{314}{25} = 12 \frac{14}{25}$; $\frac{85}{17} = 5$; $\frac{25}{25} = 1$.

Правило. Чтобы обратить неправильную дробь въ смѣшанное (или въ цѣлое) число, дѣлятъ числителя на знаменателя; цѣлое частное отъ этого дѣленія означаетъ, сколько единицъ въ дроби, а остатокъ—сколько долей единицы.

II. Измѣненіе величины дроби съ измѣненіемъ ея членовъ:

149. Сравненіе дробей, у которых в знаменатели или числители одинаковы. Изъдвухъ дробей съ одинаковыми внаменателями та больше, у которой числитель больше. Напр., $\frac{5}{2}$, нотому что об'в эти дроби составлены изъ одинаковыхъ долей, но число ихъ въ первой дроби больше, чёмъ во второй.

Изъ двухъ дробей съ одинаковыми числителями та больше, у которой знаменатель меньше. Напр., $^{5}/_{9}>^{5}/_{10}$, потому что объ дроби имъють одинаковое число долей, но доли въ первой дроби крупиъе, чъмъ во второй.

150. Увеличеніе или уменьшеніе одного члена дроби. Если числителя дроби увеличить (или уменьшить) въ нѣсколько разъ, то дробь увеличится (или уменьшится) во столько же разъ. Напр., увеличить числителя дроби 4/10 въ 3 раза; получимъ 12/10. Эта дробь

больше прежней въ 3 раза, потому что число долей въ ней больше прежняго въ 3 раза, а доли остались тъ же.

Если внаменателя дроби увеличимъ (или уменьшимъ) въ нъсколько разъ, то дробь уменьшится (или увеличится) во столько же разъ. Напр., увеличимъ знаменателя дроби ф/10 въ 5 разъ, получимъ ф/50. Эта дробь меньше прежней въ 5 разъ, потому что въ неи число долей осталось прежнее, но доли сдълались мельче прежнихъ въ 5 разъ.

- 151. Увеличеніе или уменьшеніе дроби въ нѣсколько разъ. Зная, какъ изивняется дробь съ изивненіемъ ея числителя и знаменателя, мы можемъ вывести слѣдующія правила:
- 1) Чтобы увеличить дробь въ нъсколько разъ, достаточно увеличить во столько же разъ ея числителя или уменьшить во столько же разъ ея знаменателя.
- 2) Чтобы уменьшить дробь въ нѣсколько разъ, достаточно уменьшить во столько же разъ ея числителя или увеличить во столько же разъ ея знаменателя.

Примъры.

Увеличить $^{7}/_{12}$ въ 5 разъ; получимъ $^{35}/_{12}$. Увеличить $^{7}/_{12}$ въ 6 разъ; ,, $^{42}/_{12}$ или $^{7}/_{2}$. Уменьшить $^{8}/_{9}$ въ 7 разъ; ,, $^{8}/_{67}$ -Уменьшить $^{8}/_{9}$ въ 4 раза; ,, $^{8}/_{10}$ или $^{2}/_{9}$ -

152. Увеличеніе или уменьшеніе обоихъ членовъ дроби. Если числителя и знаменателя дроби увеличимъ (или уменьшимъ) въ одинановое число разъ, то величина дроби не измѣнится. Напр., уменьшивъ оба члена дроби 4/10 въ 2 раза, мы получичъ новую дробь 2/5. Эта дробь равна прежней, потому что если мы уменьшитъ только одного числителя въ два раза, то дробь уменьшится въ 2 раза; если же затѣмъ уменьшимъ еще и знаменателя въ 2 раза, то эта уменьшенная въ 2 раза дробь увеличится вдвое и, слъд., сдъпается равной прежней дроби.

153* Отъ прибавленія къ членамъ дроби одного и того же числа дробь, меньшая 1, увеличивается, а дробь, большая 1, уменьшается, при чемъ та и другая приближаются къ 1.

Напр., прибавимъ къ членамъ правильной дроби $^5/_7$ по 3; получимъ $^8/_{10}$. Первая дробь меньше 1 на двѣ седьмыхъ, а вторая мен ше 1 тоже на двѣ, но не седьмыхъ, а десятыхъ. Но $^2/_{10} < ^2/_7$; вначитъ, вторая дробь ближе къ 1, чѣмъ первая, и потому $^8/_{10} > ^5/_7$. Возьмемъ теперь неправильную дробь, большую 1, напр., $^8/_5$, и прибавимъ къ ея членамъ по какому-нибудь числу, напр., по 4; тогда получимъ $^{12}/_9$. Первая дробь больше 1 на 3 пятыхъ, а вторая больше 1 тоже на 3, но не пятыхъ, а девятыхъ; но $^3/_9 < ^3/_5$; вначитъ, вторая дробь ближе къ 1, чѣмъ первая, и потому $^{12}/_9 < ^8/_5$.

III. Сокращеніе дробей.

154. Опредъление Сокращениемъ дроби называется приведение ся къ болъе простому виду посредствомъ раздъления числителя и знаменателя на одно и то же число (отъ чего, какъ мы видъли, величина дроби не измъняется).

Конечно, сократить можно только такую дробь, у которой члены имѣють какого-нибудь общаго дѣлителя, кромѣ 1: напр., дробь $^{8}/_{12}$ можно, а дробь $^{9}/_{20}$ нельзя, сократить, такъ какъ у первой дроби числитель и знаменатель имѣють общаго дѣлителя помимо 1, именно 4, а числитель и знаменатель второй дроби не имѣють никакого общаго дѣлителя, помимо 1.

Дробь, которая не можеть быть сокращена, наз. несократимою.

155. Два способа сокращенія. Первый способь (пося в довательное сокращеніе) состоить вътомъ, что, руководствуясь признаками льяп 4

мости, опредължоть, не дълятся ли числитель и знаменатель данной дроби на какого-нибудь общаго дълителя (кромъ 1); если такой дълитель существуеть, то на него дробь сокращають: полученную послъ сокращенія дробь, если можно, сокращають такимъ же путемъ снова; продолжають такое послъдовательное сокращеніе до тъхъ поръ, пока не получится дробь несократимая. Напр.:

$$\frac{\frac{10}{840}}{3600} = \frac{\cancel{84}}{\cancel{360}} = \frac{\cancel{31}}{\cancel{90}} = \frac{\cancel{7}}{\cancel{30}}$$

Для намяти надписывають надъ дробью то число, на которое сокращають.

Второй способъ (полное сэкращеніе) употребляется тогда, когда по признакамъ дѣлимости нельзя или затруднительно опредѣлить, сократима ли дробь, или нѣтъ. Тогда отыскивають (способомъ послѣдовательного дѣленія) общаго наибольшаго дѣлителя членовъ дроби и, если такой окажется не 1. дѣлитъ на него эти члены. Напр., пусть требуется сократить зэ¹/527 Для этого находимъ общаго наибольшаго дѣлителя чисель 391 и 527 (онъ равенъ 17) и на него сокращаемъ:

$$\frac{391}{527} = \frac{391 - 17}{527 \cdot 17} = \frac{23}{31}.$$

Въ этомъ случай послё сокращенін получается дробь песократимая. Дёйствительно, общій напб. дёлитель членовъ дроби долженъ содержать въ себё всёхъ общихъ простыхъ множителей, входящихъ въ составъ этихъ членовъ; поэтому когда на него раздёлимъ числителя и знаменателя, то полученныя частныя уже не могутъ содержать въ себё никакихъ общихъ множителей (кромё 1), и, слёд.. пе будутъ нмёть никакихъ общихъ дёлителей.

156*. Те с р е м а. Если двъ дроби равны и одна изъ нихъ изсократима, то члены другой дроби должны быть въ одинаковоз число разъ кратны со твътствующихъ членовъ несократимой дроби. Положимъ, что

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$$

при чемъ допустимъ, что первая дробь несократима, т.-е. что члены ен a и b не имѣютъ общихъ дѣлителей, кромѣ 1. Требуется доказать, что a_1 кратно a и b_1 кратно b и притомъ въ одинаковое число разъ. Для доказательства умножимъ объчлена второй дроби на b, а первой—на b_1 ; такъ какъ величины дробей отъ втого не измѣнятся, то получимъ равенство:

$$\frac{ab_1}{bb_1} = \frac{a_1b}{b_1b}; \text{ откуда: } ab_1 = a_1b \tag{1}$$

Ивая часть этого равенства двинтся на a; вначить, его правая часть тоже двинтся на a; но b, но условію, есть числе, вванино простоє съ a; вначить, надо, чтобы a_1 двинлось на a (§ 120). Обозначивь частное оть двинія a_1 на a буквой m, можемь положить: $a_1 = am$, поств чего равенство (1) даеть:

$$ab_1 = amb$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на a, получимѣ $b_1 = mb$. Итакъ: $a_1 = am$ и $b_1 = bm$; а это вначитъ, что a_1 и b_1 въ одинаковое число разъ кратны соотвѣтственно a и b.

Слѣдствіе. Даѣ несократимыя дроби равны только тогда, когда у нихъ равны числители и равны знаменатели.

IV. Приведеніе дробей къ общему наименьшему знаменателю.

157. Объяснение. Основываясь на томь, что дробь не измёнить своей величины, если оба ея члена умножным на одно и то же число, мы всегда можемы выразить данным дроби въ одинаковыхъ доляхъ единицы или, какъ говородъ и ривести ихъ къ общему внаменател ю

Укажемъ способъ, посредствомъ котораго можно приводить дроби не только къ общему, но притомъ и къ на ии е н ь ш е м у - знаменателю.

Возьмемъ для примѣра двѣ дроби: $^{5}/_{12}$ и $^{7}/_{15}$ и зададимся вопросомъ, пельзя ли эти дроби выразить въ одпиаковыхъ доляхъ единицы? Дробь $^{5}/_{12}$ —песократима; поэтому, кромѣ 12-хъ долей, ее можно выразить въ доляхъ 24-хъ, 36-хъ, 48-хъ и т. д.; другими словами, знаменатели всѣхъ дробей, которымъ можетъ равняться дробь $^{5}/_{12}$, должны быть числами, кратными 12-ти *); подобно этому, знаменатели всѣхъ дробей, которымъ можетъ равняться песократимая дробь $^{7}/_{15}$, должны быть числами, кратными 15-ти; слѣд., общій знаменатель этихъ друхъ дробей долженъ быть общимъ кратнымъ числомъ 12-ти и 15-ти, а пацменьшій общій знаменатель долженъ быть наименьшимъ кратнымъ числомъ 12-ти и 15-ти. Найдемъ наименьшее кратное этихъ чиселъ:

Это и будеть наим. общій знаменатель дробей 5/12 и 2/15. Чтобы вырозить каждую изъ этихъ дробей въ 60-хъ доляхъ, найдемъ для ихъ знаменателей такъ нарываемыхъ дополнительныхъ множителей, т.-е. для каждаго знаменателя найдемъ то число, на которое его надо умцожить, чтобы получить наим. кратное. Сравнивая между собою разложенія 12-ти, 15-ти и 60-ти, находимъ, что для полученія 60-ти надо умножить 12 на 5, а 15 на 2.2, т.-е. на 4. Чтобы не изм'єннянсь величины дробей, надо умножить числителя каждой дроби на то же число, на которое умножаемъ ел знаменателя:

$$\frac{5}{12} = \frac{5.5}{12.5} = \frac{25}{60} \quad \frac{7.4}{15} = \frac{7.4}{15.4} = \frac{28}{60}$$

^{*)} Доказательствомъ втого утвержденія служить теорема § 156.

Пусть еще требуется привести къ-наименьшему общему внаменателю три дроби: $^4/_{90}$ $^7/_{20}$ и $^8/_{75}$. Первая изъ нихъ-сократимая дробь; нослѣ сокращенія она даеть $^2/_{45}$. остальныя дроби—несократимыя. Отыщемъ наименьшее кратное знаменателей 45, 20 и 75:

Теперь умножимь оба члена каждой дроби на дополнительнаго множителя для ея знаменателя:

$$\frac{2}{45} = \frac{2 \cdot 20}{45 \cdot 20} = \frac{40}{900}; \frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 45}{20 \cdot 45} = \frac{315}{900}; \frac{8}{75} = \frac{8 \cdot 12}{75 \cdot 12} = \frac{96}{900}.$$

Правило. Чтобы привести дроби къ наименьшему общему знаменателю, предварительно, если можно, ихъ сокращаютъ, затъмъ находятъ наименьшее кратное всъхъ знаменателей и, наконецъ, умножаютъ оба члена каждой дроби на дополнительнаго множителя для ея знаменателя.

158. Нѣкоторые особые случаи. Случай 1-й, когда никакая пара внаменателей не содержить общихь множителей. Напр. $^{3}/_{7}$ $^{4}/_{15}$ $^{5}/_{8}$. Въ этомъ случай наим. кратное знаменателей равно произведенію ихъ: 7.15.8. Слёд., оба члена первой дроби придется умножить на 15.8=120, второй—на 7.8=56 и третьей—на 7.15=105:

$$\frac{3}{7} = \frac{3.120}{7.120} = \frac{360}{840}; \quad \frac{4}{15} = \frac{4.56}{15.56} = \frac{224}{840}; \quad \frac{5}{8} = \frac{5.105}{8.105} = \frac{525}{840}.$$

Правило. Чтобы привести къ наименьшему общему внаменателю такія несократимыя дроби, у которыхъ никакая пара внаменателей не содержитъ общихъ множителей, умножаютъ оба члена наждой дроби на произведеніе внаменателей всёхъ остальныхъ дробей.

Такъ же поступають, когда внаменатели—числа простыя.

Случай 2-й, когда нанбольшій изъ внаменателей дёлится на каждаго изъ остальныхъ, напр., $^{5}/_{7}$, $^{7}/_{15}$ $^{8}/_{315}$. Знаменатель 315 дёлится на 7, на 15 и на самого себя. Въ этомъ случай наибольшій знаменатель есть наименьшее кратное всёхъ знаменателей; значить, онъ долженъ быть общимъ знамена телемъ:

доп. мн. для 7=45; доп. мн. для 15=21.
$$\frac{3}{7} = \frac{3.45}{7.45} = \frac{135}{315}; \frac{7}{15} = \frac{7.21}{15.21} = \frac{147}{315}; \frac{8}{315} = \frac{8}{315}.$$

158,а. Замъчаніе. Приведеніе дробей къ общему знаменателю облегчаетъ сравненіе ихъ по величинъ. Пусть, напр., требуется узнать, равны или не равны дроби ⁵/₇ и ⁹/₁₃, и если не равны, то которая изъ нихъ больше. Для этого приведемь ихъ къ общему знаменателю:

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 13}{7 \cdot 13} = \frac{65}{91}$$
; $\frac{9}{13} = \frac{9 \cdot 7}{13 \cdot 7} = \frac{63}{91}$

Теперь сразу видно, что данныя дроби не равны, а вменно первая дробь больше второй.

V. Нахожденіе дроби даннаго числа и обратный вопросъ.

159. Нахожденіе дроби даннаго числа. Умёл увеличивать и уменьшать число въ нёсколько разъ, мы легко можемъ находить любую дробь даннаго числа*).

^{*)} Нахожденіе дроби даннаго числа представляєть собою умноженіе на отвлеченную дробь, а нахожденіе неизв'ястнаго числа по данной величині его дроби есть д'яленіе на отвлеченную дробь. Поетому содержаніе егой главы можно было бы отнести къ умноженію и д'яленію дробей. Такъ бы оно и слів-

Примъръ І-й. Найти 3/4 числа 26-п.

Для этого сначала найдемъ ¹/₄ числа 26-ти (т -е. уменьшимъ 26 въ 4 раза), и потомъ получениую четверть увеличимъ въ 3 раза:

$$\frac{1}{4}$$
 числа 26-ти составляеть $\frac{26}{4}$ (§ 143), слъд., $\frac{3}{4}$ числа 26-ти составляють $\frac{26\cdot 3}{4} = \frac{78}{4} = 19\frac{1}{2}$ (§ 151,1).

Примъръ 2-й. Найти 8/1 числа 5/4

Для этого найдемъ спачала $\frac{1}{3}$ числа $\frac{t}{16}$ (г.-е. уменьшимъ $\frac{5}{6}$ въ 3 раза), а затъмъ результатъ уселичимъ въ 8 разъ:

$$\frac{1}{3}$$
 числа $\frac{5}{6}$ составляють $\frac{5}{6 \cdot 3}$ (§ 151,2); слъд., $\frac{8}{3}$ числа $\frac{5}{6}$ составляють $\frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 3} = \frac{40}{18} = 2 \cdot \frac{2}{9}$.

160. Примъры задачъ на нахожденіе дроби даннаго числа 1) Потадъ въ часъ проходить 40 версть; сколько версть онъ проходить въ ⁷/₃ наса? . . .

Очевидно, что въ $\frac{7}{8}$ часа по $\hat{}$ здъ проходить столько верстъ, сколько ихъ заключается въ $\frac{7}{1}$, сорока верстъ; значитъ, для р $\hat{}$ вшенія задачи надо па $\hat{}$ ти $\frac{7}{8}$ сорока.

2) Аршинъ матеріи стоить 8 руб.; сколько рублей стоять ^{*}/_{*} аршинъ?

Очевидно, что $^{7}/_{4}$ аршина матерін стоять стояько рублей, сколько ихъ заключается въ $^{7}/_{4}$ восьми рублей, значить, для ръшенія задачи надо найти $^{7}/_{4}$ восьми.

довало двлать въ систематическомъ курсв арпочетнки, если бы етому курсу предшествовалъ особый пропедентическій курсъ дробей. При отсутствіи же такого курса нахожденіе дроби даннаго числа и обратный вопросъ полезно выдвлить въ особую главу, предшествующую систематическому разсмотрвнію двйствій надъ дробями.

161. Нахожденіе числа по данной величинь его дроби. Рышамь теперь обратный вопрось, какъ найти неизвъстное число, если величина ивкоторой определенной дроби этого числа намъ задана.

Примѣръ 1-й. Найти число, котораго ⁸/₈ составляють 5.

Такъ какъ въ 5-и ваключаются 3 восьмыхъ искомаго числа, то, уменьшивъ 5 въ 3 раза, мы найдемъ ¹/₃ искомаго числа, а увеличивъ результатъ въ 8 разъ, получимъ ⁸/₆ искомого число.

Для ясности выразимъ это строчками:

 $\frac{3}{8}$ йензвъстнаго числа составляють 5; слъд. $\frac{1}{8}$ неизвъстнаго числа составляють $\frac{5}{3}$. $\frac{8}{8}$ неизвъстнаго числа составляють $\frac{5}{3}$. $8 = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$

Примъръ 2-й. Найти число, котораго $^{6}/_{2}$ составляють $2^{9}/_{9}$.

Для ясности выразимъ ходъ разсужденія строчками:

 $\frac{8}{3}$ неизвъстнаго числа составляють $2\frac{2}{9}=\frac{20}{9}$; слъд., $\frac{1}{3}$ неизвъстнаго числа составляеть $\frac{20}{9 \cdot 8}$; а $\frac{3}{3}$ неизвъстнаго числа составляють $\frac{20 \cdot 3}{9 \cdot 8}=\frac{60}{72}=\frac{5}{6}$.

161,а. Примъры задачъ на нахожденіе числа по данной величинъ его дроби.

1) Въ 3/4 часа поъздъ проходить 30 версть; сколько версть онъ проходить въ чась?

 12) За $1^3/_4$ арш. (т.-е. sa $^{12}/_4$ арш.) матеріи заплатили 14 руб.; сколько стоить аршинь этой матеріи?

Очевидно, что аршинъ матеріп стонтъ такое число рублей, котораго $^{7}/_{4}$ составляютъ 14 руб.; значить, здёсь нужно найти число, котораго $^{7}/_{4}$ равны 14.

VI Дъйствія надъ отвлеченными дробями.

162*. Симелъ дъйствій надъ дрэбными числами. Такъ какъ дробныя числа выражають нѣкоторыя вначенія величины, то дѣйствія надъ ними имѣють тоть же смысль, какъ и дѣйствія надъ именованными числами (см. § 104). Такъ, сложить три дроби: $\frac{3}{1} + \frac{7}{10} + \frac{9}{10}$ значить найти число, выражающее сумму трехъ вначеній величины, изъ которыхъ одно состоить изъ 3-хъ четвертей, другое—изъ 7 десятыхъ и третье—изъ 9 шестнадцатихъ долей о д н о й и т о й ж е е д и н и ц ы (напр., найти число, выражающее сумму трехъ длинъ: $\frac{3}{10}$ аршина, $\frac{7}{10}$ аршина в $\frac{9}{10}$ аршина).

Кром'й того для обобщенія нікоторых вопросовь вы курсі дробей допускають еще два особыя дійствія: умноженіе на отвлеченную дробь и діленіе на отвлеченную дробь.

Сложеніе.

163. Опредъленіе. Сложеніе дробныхъ чисель можно опредълить такъ же, какъ и сложеніе цълыхъ чисель (§ 20), а именю:

сложение есть ариеметическое дъйствие, посредствомъ котораго нъсколько данныхъ чиселъ (слагаемыхъ) соединяются въ одно число (сумму).

Выводъ правила. Разсмотримь особо слъдующів три случая:

1) Пусть требуется найти сумму пъсколькихъ дробей съ одинаковыми знаменателями, напр., такихъ:

$$\frac{7}{11} + \frac{3}{11} + \frac{5}{11}$$

Очевидно, что 7 одиннадцатыхъ, да 3 одиннадцатыхъ, да 5 одиннадцатыхъ какой-нибудь единицы составляютъ 7+3+5 одиннадцатыхъ той же единицы:

$$\frac{7}{11} + \frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{7 + 3 + 5}{11} = \frac{15}{11} = 1 \frac{4}{11}.$$

2) Пусть требуется сложить дроби съ разными знаменателями, напр., такія:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{10} + \frac{9}{16}$$

Приведя всё эти дроби къ общему знаменателю, сдёлаемъ сложеніе, какъ въ первомъ случай:

$$\frac{\frac{20}{3}}{\frac{3}{4}} + \frac{\frac{8}{7}}{\frac{7}{10}} + \frac{\frac{8}{9}}{\frac{9}{16}} = \frac{60 + 56 + 45}{80} = \frac{161}{80} = 2\frac{1}{80}.$$

Число, поставленное надъ каждою данною дробью, есть дополнительный множитель, на который должно умножить члены дроби, чтобы привести ее къ общему знаменателю.

Правило. Чтобы сложить дроби, ихъ предварительно приводять нь общему знаменателю, затъмъ складывають числителей и подъ суммою ихъ подписывають общаго знаменателя.

3) Пусть, наконець, требуется сложить сившанныячисла:

$$4\frac{2}{15}$$
 $8\frac{9}{10}$ u $8\frac{5}{6}$

Спачала сложимъ дроби:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{2}}}{15} + \frac{\overset{5}{\cancel{9}}}{10} + \frac{\overset{5}{\cancel{5}}}{6} = \frac{4 + 27 + 25}{30} = \frac{56}{30} = 1 \frac{26}{30} = 1 \frac{13}{15}.$$

Теперь сложимъ цёлыя числа и къ суммё ихъ добавимъ 1, получившуюся отъ сложенія дробей:

$$4+8+3+1=16.$$

4+8+3+1=16. Значить, полная сумма равна 16 $\frac{13}{15}$.

Замъчанія. 1) Относительно сложенія дробиаго числа н нуля держатся того же условія, какое было указано въ сложеніи пёлыкъ чисель (§ 24,a), а именно: прибавить О къ накому-нибудь числу или прибавить къ О какое-нибудь число вначитъ оставить это число безъ измѣненія.

2) Главное свойство суммы, указанное нами раньше для цълыхъ чисель (§ 21), принадлежить также и дробнымъ числамъ, т.е. сумма не зависитъ отъ того порядка, въ которомъ мы сосдиняемъ единицы и доли единицъ слагаемыхъ. Такъ, чтобы сложить смъщанныя числа, панныя въ примъръ 3-мъ, мы можемъ сложить сначала пълыя числа (получимъ 15), а потомъ дроби (получимъ $1^{13}/_{15}$) и объ суммы соединить въ одно число (получнмъ $16^{13}/_{18}$); или можемъ сложить сначала 2-е и 3-е слагаемыя (получимъ $12^{11}/_{15}$), а потомъ добавить 1-е слагаемое (получимъ 1613/18) Въ какомъ бы порядкъ мы ни соединяли единицы и доли единицъ глагаемыхъ, всегда получимъ одну и ту же сумму*).

Вычитаніе.

164. Опредъление. Вычитание соть ариометическое дъйствіе, посредствомъ котораго по данной суммъ

^{*)} Такъ же, какъ и для целыхъ чиселъ, свойство это въ сущности распадается на 2 отдельныя свойства перемьотительное ы сочетательное (см. § 21,а).

(уменьшаемому) и одному слагаемому (вычитаемому) оты-

Другими словами, вычитание есть дъйствие, посредствомъ котораго узнается, какое число останется оть уменьщаемаго, если оть него отдълимъ часть, равную вычитаемому.

Выводъ правила: Разсмотримь особо слъдующіе з случая:

1) Пусть даны для вычитанія дроби съ одинаковыми знаменателями, напр, такія:

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$$

Если огь 7 сосымых отдёлимь часть, равную 3 восымымь, то останется, очевидно, 7—3 восымыхы:

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7 - 3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

2) Пусть данныя дроби им'ьють разных в знаменаченей; напр.:

$$\frac{11}{15} - \frac{3}{8}$$

Тогда, приведя эги дроби кь общему знаменателю, сльдаемъ вычитаніе, какъ было объяснено раньше:

$$\frac{8}{11}$$
 $\frac{18}{15}$ $\frac{18}{8}$ $\frac{88-45}{120}$ $\frac{43}{120}$

Правило. Чтобы вычесть дробь изъ длебл, предварительно приводять къ общему знаменателю, затъмъ изъчислителя уменьшаемаго вычитаютъ числителя вычитаемаго и подъ ихъ разностью подписываютъ общаго знаменателя.

 Если нужно вычесть сыбывание число изъ другого вибиваниято числа, то, если можно, в и ч и т а ю г ъ дробь изъ дроби, а цѣлое изъ цѣлаго. Напр.: ,

$$8\frac{9}{11} - 5\frac{3}{4} = 8\frac{36}{44} - 5\frac{33}{44} = 3\frac{3}{44}$$

Если же дробь вычитаемаго больше дроби уменьшаемаго, то беруть одну единицу изъ цёлаго числа уменьшаемаго, раздробляють ее въ надлежащія доли и прибавляють къ дроби уменьшаемаго. Напр.:

$$10\frac{3}{11} - 5\frac{5}{6} = 10\frac{18}{66} - 5\frac{55}{66} = 9\frac{84}{66} - 5\frac{55}{66} = 4\frac{29}{66}.$$

Такъ же производится вычилание дроби изъ цѣлаго числа; напр.:

$$7 - 2\frac{3}{5} = 6\frac{5}{5} - 2\frac{3}{5} = 4\frac{2}{5}$$
$$10 - \frac{3}{17} = 9\frac{17}{17} - \frac{3}{17} = 9\frac{14}{17}.$$

Замъчаніе. При вычитаній нуля держатся того же условія, какое было указано при вычитаній цілыхъ чисель (§ 31, замічаніе 1-е), а именно: вычесть 0 изъ накого-нибудь числа значить оставить это число безъ изміненія.

- 165. Измѣненіе суммы и разности при измѣненіи данныхъ чиселъ. Сумма и разность дробныхъ чиселъ измѣняются при измѣненіи данныхъ чиселъ совершенно такъ же, какъ сумма и разность цѣлыхъ чиселъ, а именю:
- •1) Если увеличивается (или уменьшается) слагаемое, то и сумма увеличивается (или уменьшается) на столько же. •
- 2) Если увеличивается (или уменьшается) уменьшаемое, то и разность узеличивается (или уменьшается) на столько же.

. 8) Если упеничивается (или уменьшается) в чинтаемое то разность уменьшается (или увеличивается) на столь-ко же*)

Уппоженіе.

166. Опредъленія. Умноженіе дробнаго числа на цёлое опредъляется такь же, какъ и умноженіе цілыхь чисель, а именно: умножить какое-нибудь число (множимое) на цілое число (множитель) значить повторить множимое слагаемымь столько разь, сколько во множитель единиць.

Такъ, умножить ⁷/₈ на 5 значить повторить ⁷/₈ слагаемымъ 5 разъ, другими словами, найти сумму:

Эго опредъление теряеть смысль 'для того случая, когда множитель есть дробь. Напр., нельзя сказать, что умножить 5 на ⁷/₈ значить повторить числа 5 слагаемымь ⁷/₈ раза, такъ какъ выражение « ⁷/₈ раза» не имфеть смысла.

Умноженію на дробь мы условимся придавать слідую-

умножить какое-нибудь чясло (мпожимое) на дробь (множитель) вначить найти эту дробь множимаго.

Такъ, умножить 5 на $^{7}/_{8}$ значить найти $^{7}/_{8}$ ияти единиць.

Такимъ образомъ, нахождение дроби даннаго числа, разсмотрънное нами раньше (\S 159), мы будемъ теперь называть умножениемъ на дробь**).

^{*)} Тикъ же, какъ это было начи сдълано для цълыхъ чиселъ (см. выноску къ § 38), доказывается, что указанныя измъненія сумым составляють слъдствія свойствъ перемъстительнаго и сочетательнаго. Измъненія разности составляють слъдствія опредъленія вычитанія, какъ дъйствія, обратиаго сложентю.

фф) Опредвленіе умноженія на дробь можно примвиять и къ цівлому числу, если только цівлое число предварительно обратить въ неправильную дробь (§ 146). Но въ гакомъ случай возникаеть вопрось, не будеть ли опредвленіе умноженія на дробь противорічнть опредвленію умноженія на цівлое число. Положимъ, напр., что требуется умножить 5 на 3 По опредвленік-умноженія на цівлое число это значить повторить 5 слагаемыхь 3 раза. Если же мы-вивсто цівлаго множители 3 возь-

*Задача. Аршинъ сукна стоить 5 руб.; сколько стоятъ и всколько аршинъ этого сукна?

Для ръшенія вопроса мы должны умножить 5 руб. на число аршинъ, когда это число цёлое (напр. 10 арш.), и мы должны найти дробь 5 ти руб., когда число аршинъ дробное (напр., $^{13}/_{2}$ арш.).

Если нахожденіе дроби числа мы условимся называть умноженіемъ на дробь, то на нашу задачу можно дать одинь общій отвѣтъ: надо цѣцу одного аршина умножить на число аршинъ.

Число, получаемое послъ умноженія, наз. произведеніемъ (какъ и въ случаъ умноженія цълыхъ чисель).

Замътимъ теперъ же, что отъ умноженія на правильную дробь число уменьшается, а отъ умноженія на неправильную дробь число увеличивается, если эта неправильная дробь больше 1, и остается безъ измѣненія, если она равна 1.

Напр., произведение 5. $^{7}/_{8}$ должно быть меньше 5-и, такъ какъ оно означаетъ $^{7}/_{8}$ пяти, а $^{7}/_{8}$ пяти меньше $^{8}/_{8}$ пяти; произведение 5 $^{9}/_{8}$ должно быть больше 5-и, потому что оно означаетъ $^{9}/_{8}$ пяти, а $^{9}/_{8}$ пяти больше $^{6}/_{8}$ пяти; наконецъ, произведение 5 $^{8}/_{8}$, 1.-е $^{8}/_{8}$ ияти, равно 5

Замъчаніе. При умножени дробныхъ чисель, такъ же какъ и цълыхъ, произведеніе принимается равнымъ 0, если какой-нибудь изъ сомножителей равенъ 0, такъ, $0 \cdot \frac{7}{8} = 0$ и $\frac{7}{8} \cdot 0 = 0$.

167. Выводъ правилъ. Разсчотричъ особо слъдующіе 4 случал:

мемъ неправильную дробь, равную 3, напр. $^{20}/_{10}$. и станемъ 5 умножать не на 3, а на $^{30}/_{10}$. то, согласно опредь ению умноженія ва дробь, мы должны будемъ найти $^{20}/_{10}$ числа 5. Такъ какъ $^{10}/_{10}$ числа 5 составляютъ ровно 5, то $^{30}/_{10}$ числа 5 составляютъ 5, повторенное слагаемымъ 3 раза; слъд., будемъ ли мы 5 умножать на 8, или на $^{30}/_{10}$, результатъ умноженія окажется одинъ и тоть же. Такимъ соразомъ, о предъленіе, умноженія на дробь не противоръчитъ опредъленію умноженія на цробо число.

1) У м н о ж е н і е дроби на ц в лое числ'о. Пусть требуется $^3/_{10}$ умпожить на 5. Это значить: новторить $^3/_{10}$ слагаемымь 5 разь, иначе сказать, увеличить $^3/_{10}$ въ 5 разь. Чтобы увеличить какую-инбурь рробь въ 5 разь, достаточно увеличить ел чнелителя или уменьшить ел знаменателя въ 5 разь (§ 153). Поэтому:

$$\frac{3}{10} \times 5 = \frac{3 \cdot 5}{10} = \frac{15}{10} \text{ mm} \frac{3}{10} \times 5 = \frac{3}{10 \cdot 5} = \frac{3}{2}$$

Правило I-е. Чтобы умножить дробь на цълое число, умножають на это цълое число числителя или дълять на него знаменателя дроби.

Слъдствіе. Произведені е дроби на еязна менателя равно ел числителю. Напр.:

$$\frac{5}{8}$$
 8= $\frac{5.8}{8}$ = 5; $\frac{22}{7}$ 7= $\frac{22.7}{7}$ =22.

2) Умноженіе цѣлаго числа на дробь. Пусть дано умножить 7 на $^4/_{9}$ Эго значить: найти $^4/_{9}$ числа 7 Для этого найдемъ сначала $^1/_{9}$ числа 7, а потомъ $^4/_{9}$

Такъ какъ
$$\frac{1}{9}$$
 числа 7 составляеть $\frac{7}{9}$, а $\frac{4}{9}$ числа больше $\frac{1}{9}$ этого числа въ 4 раза, то $\frac{4}{9}$ числа 7 составляють $\frac{7\cdot 4}{9}$. Зпрчить: $7\times\frac{4}{9}=\frac{7\cdot 4}{9}=\frac{28}{9}$.

Правило 2-е. Чтобы умножить цѣлое число на дробь, умножають цѣлое число на числителя дроби и это произведеніе дѣлають числителемь, а знаменателемь подписывають внаменателя дроби.

3) Умноженіе дроби на дробь. Пусть надо умножить $\frac{3}{5}$ на $\frac{7}{8}$ Эго значить: пайти $\frac{7}{8}$ числа $\frac{3}{5}$. Для этого сначала найдемъ $\frac{1}{8}$, а затъмъ $\frac{7}{8}$ числа $\frac{3}{5}$.

Такъ какъ
$$\frac{1}{8}$$
 числа $\frac{3}{5}$ составляеть $\frac{3}{5 \cdot 8}$, а $\frac{7}{8}$ числа больне $\frac{1}{8}$ этого числа въ 7 разъ, то $\frac{7}{8}$ числа $\frac{8}{5}$ составляють $\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8}$. Значить: $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{21}{40}$.

Правило 8-е. Чтобы умножить дробь на дробь, умножають числителя на числителя и знаменателя на знаменателя и первое произведение беруть числителемь, а второе—знаменателемь.

Замъчаніе. Это правило можно примънять и къ умноженію дреби на цёлое число и цълаго числа на дробь, если только цёлое число будемъ разсматривать, какъ дробь съ знаменателемъ 1. Такъ:

$$\frac{3}{10} \times 5 = \frac{3}{10} \times \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 1} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2};$$
$$7 \times \frac{4}{9} = \frac{7}{1} \times \frac{4}{9} = \frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 9} = \frac{28}{9}.$$

4) Умноженіе смёщанных чисель. Правило 4-е. Чтобы умножить смёшанныя числа, ихъ предварительно обращають въ неправильныя дроби и затыть умножають по правиламъ умноженія дробей. Напр.:

$$7 \times 5 \frac{3}{4} = 7 \times \frac{23}{4} = \frac{7 \cdot 23}{4} = \frac{161}{4} = 40 \frac{1}{4};$$

$$2 \frac{3}{5} \times 4 \frac{2}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{14}{3} = \frac{13 \cdot 14}{5 \cdot 3} = \frac{182}{15} = 12 \frac{2}{15};$$

Впрочемъ, обращение смишинимъь чиселъ въ неправильным дроби не составляетъ необходимости. Напр., чтобы умпожить 7 на 5°/4, можно 7 повторить слагаемымъ 5 разъ и къ получениой суммъ приложить °/4 7-и:

7.5
$$\frac{3}{4}$$
 = $(7 \times 5) + (7 \times \frac{3}{4})$ = $35 + \frac{21}{4}$ = $40\frac{1}{4}$

168. Сокращеніе при умноженіи. При умноженіи дробей вногда можно дёлать сокращеніе. Напр.:

1)
$$12 \times \frac{7}{8} = \frac{12 \cdot 7}{8} = \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$$
;

2)
$$\frac{16}{21} \times \frac{5}{23} = \frac{16 \times 5}{21 \times 28} = \frac{4 \times 5}{21 \cdot 7} = \frac{20}{147}$$
.

Такое сокращение возножно дёлать потому, что величича дроби не измёнится, если числителя и знаменателя ел уменьшимъ въ одинаковое число разъ.

Изт приведенныхъ примъровъ видно, что при умножении можно сокращать цёлое число съ знаменателемъ другой и числителя одной дроби съ знаменателемъ другой.

169. Произведеніе трехъ и болье дробей.

Пусть дано перемножить три дроби: $\frac{2}{3} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{6}$. Эго значить, что $^2/_3$ требуется умножить на $^7/_8$ и полученное пронзведеніе умножить затымь на $^5/_6$. Учноживь двы первыя дроби, получимь: $\frac{2\cdot 7}{3\cdot 8}$; умноживь это число на третью

дробь, найдемъ
$$\frac{2.7.5}{3.8.6} = \frac{70}{144}$$
. Значить:

чтобы перемножить нѣсколько дробей, перемножають ихъ числителей между собою и знаменателей между собою и первов произведение берутъ числителемъ, а второв—значенателемъ.

Если въ числъ множителей есть смъщанныя числа, то ихъ обращають въ неправильныя дроби.

Замѣчаніе. Это правило можно примѣнять и къ такимъ произведеніямъ, въ которыхъ нѣкоторые множители числа цълыя, если только цълое число будемъ разсматривать, какъ дробь, у которой знаменатель 1. Напр.:

$$\frac{3}{4} \times 5 \times \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{1} \times \frac{5}{8} = \frac{3.5.5}{41.6} = \frac{5.5}{4.2} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$$

- 170. Свойства произведенія. Та свойства произведенія, которыя были нами указапы для цёлых чисель (§§ 59, 60 и 61), принадлежать и произведенію дробныхь сомножителей. Укажемь эти свойства.
- 1) Произведение не измъняется отъ перемъны мъстъ сомножителей (перемъстительное свойство).

Hamp.
$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$$

Дъйствительно, нервое произведеніе равцо дроби 2.5.3 3.6.4 а второе равно дроби $\overline{6.4.3}$. Но эти дроби одинаковы, потому что ихъ члены отличаются только порядкомъ цълыхъ сомножителей; а произведеніе цълыхъ чиселъ не измъняется при перемънъ мъстъ сомножителей.

2) Чтобы умножить накое-нибудь число на произведеніе, достаточно умножить это число на перваго сомножителя, полученное число умножить на вторего, и т. д.

Пусть, вапр, надо умножить:

$$10 \times \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}\right)$$
, τ . e. $10 \times \frac{15}{28}$.

Разъяснимъ, что для этого достаточно умножить 10 на $^{3}/_{4}$, а нотомъ полученное число умножить еще на $^{5}/_{7}$. Дъйствительно, когда мы умножимъ 10 на $^{3}/_{4}$, то мы найдемъ $^{3}/_{4}$ десяти; если затъмъ эти $^{3}/_{4}$ десяти умножимъ еще на $^{5}/_{7}$, то получимъ $^{5}/_{7}$ трехъ четвертей 10-и. Но $^{5}/_{7}$ трехъ четвертей (чего-либо) составляютъ $^{3}/_{4}$. $^{5}/_{7}$, т.-е. $^{15}/_{28}$ (этого чего-либо), значитъ, послъ двухъ умноженій 10-и на $^{3}/_{4}$ и полученнаго числа на $^{5}/_{7}$, мы найдемъ тогь же самый результатъ, какъ и отъ одного умноженія 10-и на $^{15}/_{28}$.

3) Произведение не измънится, если какіе-либо сомножители будутъ замънены ихъ произведениемъ.

Hamp.:
$$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{35} = \frac{1}{28}$$

- , Замѣчанія. 1). Свойства 2-е и 3-е, какъ это было уже указано для пѣлыхъ чисель (см. § 61,а), составляють въ сущности одно свойство, пазываемое сочетательнымъ.
- 2) Распредвинтельное свойство произведенія также принадлежить дробныть числамъ. Докатательство этого предложенія налагается обыкновенно въ курсахъ алгебры.

Дъленіе.

- 171. Опредъленіе. Дъленіе есть аривметическое дъйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію (дъличому) и одному изъ сомножителей (дълителю) отыснивается другой сомножитель (частпое).
- Напр., разд'ялить ⁷/₈ на ³/₅ значить: найти такое число, которое надо умножить на ³/₅, чтобы получить ⁷/₅; или найти такое число, на которое надо умножить ³/₅, чтобы получить ⁷/₈. Вь первомъ случав частное представляеть собою искомое множимое, во второмъ случав—искомаго кножителя. Такъ какъ мчожимое и множитель могуть мънаться ивстами, то величина частнаго не зависить отъ того, означаеть ли оно множимое или множителя.
- 172. Слъдствія. 1) Нахожденіе неизвъстнаго числа по данной его дроби, разсмотрыпное пами прежде (§ 161), можеть быть выполняемо посредствомъ дъленія на дробь.

Такъ, если требуется найти такое число, котораго $\frac{7}{8}$ составляють 5, то это, другими словами, значитъ: найти такое число, которое составить 5, если его умиожимъ на $\frac{7}{8}$, значитъ, 5 есть произведение, $\frac{7}{8}$ —чиожитель, а отыскивается множимое; а это дъллегся посредствочь дъленія 5 на $\frac{7}{8}$.

2) Отъ дъленія на правильную дробь число увеличивается, а отъ дъленія на неправильную дробь число уменьшается, если эта неправильная дробь больше 1, и остается бозъ измъненія, если она равна 1.

Напр., частное $5:\frac{7}{8}$ должно быть больше 5-и, потому что 5 составляеть только $\frac{7}{8}$ этого частнаго; частное $5:\frac{9}{8}$ его, п, наконець, частное $5:\frac{6}{8}$ должно быть равно 5.

- 173. Выводъ правилъ. Разсмотримъ особо слъгующе 5 случаевъ дъленія.
- 1) Д в леніе цвлаго числана цвлое. Этоть случай быль разсмотрвнь вы ариеметикы цвлыхь чисель. Но тамь точное двленіе не всегда было возможно, такь какы двлимое не всегда есть произведеніе двлителя на цвлое число; поэтому приходилось разсматривать двленіе сь остаткомь. Теперь же, допустивь умноженіе на дробь, ны всякій случай двленія цвлыхь, чисель можемь считать возможнымь. Пусть, напр., требуется раздвлить 5 на 7, т.е. найти число, котораго произведеніе на 7 даеть 5. Такое число есть дробь $\frac{5}{7}$, потому что $\frac{20}{7}$, $\frac{20}{7}$. Т=20.

Правило 1-е. Частное отъ дъленія двухъ цълыхъ чиселъ можно выразить дробью, у которой числитель равенъ дълимому, а внаменатель—дълителю.

2) Д в леніе дроби на цвлое число. Пусть требуется раздвлить 8/9 на 4. Это значить: найти число, которое надо умножить на 4, чтобы получить 8/9. Но оть умноженія на 4 всякое число увеличивается въ 4 раза; значить, искомое число, увеличенное въ 4 раза, должно составить 8/9 и потому, чтобы найте его, достаточно дробь в/9 уменьшить въ 4 раза. Чтобы уменьшить дробь въ 4 раза, надо уменьшить въ 4 раза ея числителя или увеличить въ 4 раза ея числителя или увеличить въ 4 раза ея знаменателя; поэтому:

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8 : 4}{9} = \frac{2}{9};$$

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 \cdot 4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9};$$

или

. Правило 2-е. Чтобы раздълить дробь на цълое число, дълятъ на это цълое число числителя дроби или умножаютъ на него знаменателя дроби.

3) Д в леніе цвлаго числа на дробь. Пусть требуется раздвинть 3 на $^2/_5$. Это значить: найти такое число, которое надо умножить на $^2/_5$, чтобы получить 3. Но умножить какое-инбудь число на $^2/_5$ эпого числа; поэтому:

$$\frac{2}{5}$$
 неизвъстнаго частнаго = 3,
слъд.: $\frac{1}{5}$ неизвъстнаго частнаго = $\frac{3}{2}$.
а $\frac{5}{5}$ неизвъстнаго частнаго = $\frac{3}{2}$, $5 = \frac{3.5}{2}$.
Впачить: $3:\frac{2}{5}=\frac{3.5}{2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$.

Правило 8-е. Чтобы раздълить цълое число на дробь, умножаютъ это цълое число на знаменателя дроби и произведение дълятъ на числителя дроби.

4) Д в леніе дроби на дробь. Пусть дано раздвицть $\frac{5}{6}$ на $\frac{7}{11}$. Это значить: найти число, которое, умноженное на $\frac{7}{11}$, составить $\frac{5}{6}$. Но умножить какоенносудь число на $\frac{7}{11}$ значить найти $\frac{7}{11}$ этого числа; поэтому:

$$\frac{7}{11}$$
 неизвъстнаго частнаго = $\frac{5}{6}$, слъд.: $\frac{1}{11}$ неизвъстнаго частнаго = $\frac{5}{6,7}$, а $\frac{11}{11}$ неизвъстнаго частнаго = $\frac{5.11}{6.7}$. Значить: $\frac{5}{6}:\frac{7}{11}=\frac{5.11}{6.7}=\frac{55}{42}=1\frac{13}{42}$.

Правило 4-о. Чтобы раздълить дробь на дробь, умножають числителя первой дроби на знаменателя второй, а знаменателя первой дроби— на числителя второй и первое произведение дълять на второе.

Замъчаніе. Подь это правило можно подвести и всё предыдущіе случан, если только пёлое число будемь разсматривать, какъ дробь съ знаменателемъ 1. Такъ:

$$5: 7 = \frac{5}{1}: \frac{7}{1} = \frac{5.1}{1.7} = \frac{5}{7}.$$

$$\frac{8}{9}.4 = \frac{8}{9}: \frac{4}{1} = \frac{8.1}{9.4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

$$3: \frac{2}{5} = \frac{3}{1}: \frac{2}{5} = \frac{3.5}{1.2} = \frac{15}{2}.$$

5) Дёленіе смёшанных чисель. Правило 5-ю. Чтобы раздёлить смёшанныя числа, ихъ предварительно обращають въ неправильныя дроби и затёмъ дёлять по правиламъ дёленія дробей. Напр.:

$$8:3\frac{5}{6}=8:\frac{23}{6}=\frac{8.6}{23}=\frac{48}{23}=2\frac{2}{23};$$
$$7\frac{3}{4}:5\frac{1}{2}=\frac{31}{4}:\frac{11}{2}=\frac{31.2}{4.11}=\frac{31}{22}=1\frac{9}{22}$$

174. Общее правило дъленія. Если пересдавимь въ данной дроби числителя на мъсто знаменателя и наобороть, то дробь, получившался послъ этой перестановки, называется обратного по отношенію къ данцой. Такъ, для ⁷/₈ обратная дробь будеть ⁸/₇. Цълое число также имъетъ обратную дробь; напр., для 5 или для ⁵/₁, образная дробь будетъ ¹/₆ Условившись въ этомъ, можемъ высказать такое общее правило дъленія:

чтобы раздѣлить одно число на другое, достаточно дѣлимое умножить на дробь, обратную дѣлителю.

Въ върности этого правила легко убъдиться изъ слъдующаго примърнаго сравненія:

$$5:7 = \frac{5}{7} \quad \text{if} \quad 5 \times \frac{1}{7} = \frac{5}{7};$$
$$\frac{7}{8}:5 = \frac{7}{40} \quad \text{if} \quad \frac{7}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{40};$$

$$5: \frac{7}{8} = \frac{40}{7} \text{ m } 05 \times \frac{8}{7} = \frac{40}{7};$$

$$\frac{2}{8}: \frac{4}{5} = \frac{10}{12} \text{ m } \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}.$$

175. Сокращение при дъления. При дъления пробимкъ чиселъ иногда можно дълать сокращение. Напр.:

1)
$$12: \frac{8}{11} = \frac{12.11}{8} = \frac{3.11}{2} = \frac{33}{2} = \frac{1}{1}6 = \frac{1}{2};$$

2)
$$\frac{8}{9}: \frac{6}{7} = \frac{8.7}{9.6} = \frac{4.7}{9.3} = \frac{28}{27} = 1\frac{1}{27};$$

3)
$$\frac{5}{12}: \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 18}{12 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 7} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$$

Такое сокращение возможно дёлать потому, что величина дроби не измёнится, если числителя и внаменателя ея уменьшимъ въ одинаковое число разъ.

Изъ приведенныхъ примъровъ видно, что при дъленіи можно сокращать пълое число съ числителемъ и числителя съ числителемъ, знаменателя съ знаменателемъ.

176. Примъры задачъ, ръщаемыхъ дъленіемъ. Дъленіе употребляется во всёхъ тъхъ случаяхъ, когда одно изъ данныхъ чиселъ возможно-разсматривать какъ произведеніе, а другое, какъ миожимое или множителя. Приведемъ примъры:

Задача 1. Во сколько часовъ и в шеходъ пройдетъ путь въ $34^7/_8$ версты, если каждый часъ опъ проходитъ по $4^1/_2$ версты?

Для ръшенія задачи надо узнать, сколько разъ $4^1/_2$ персты слёдуеть повторить слагаемымъ, чтобы получить $34^7/_8$ версты; т.-е. надо отыскать, на какое число слёдуеть умножить $4^1/_2$, чтобы получить въ произведеніи $34^7/_8$. Здёсь $34^7/_8$ есть произведеніе, $4^1/_2$ — множимое, а требуется найти множителя; это выполняется дёленіемь:

$$31\frac{7}{8}$$
; $4\frac{1}{2} = \frac{279}{8}$; $\frac{9}{2} = \frac{31}{4} = 7\frac{3}{4}$.

Частное показываеть, что если $4^{1}/_{2}$ версты повторить слагаемымь 7 разы и къ результату добавить еще $^{3}/_{4}$ оть $4^{1}/_{2}$ версты, то получится $34^{7}/_{8}$ версты; вначить, $34^{7}/_{8}$ версты будугь пройдены въ $7^{3}/_{4}$ часа.

Задача 2. Сколько аршинъ сукна можно купить на 6 руб., если каждый аршинъ стоить 71/2 рублей?

Очевидно, на 6 руб. нельзя купить ни одного аршина сукна, стоимостью въ $7^1/_2$ руб.; но можно купить нѣкоторую часть аршина. Чтобы узнать, какую именно, достаточно опредѣлить, на какую дробь слѣдуегь умножить $7^1/_2$, чтобы получить 6. Вдѣсь 6 произведеніе, $7^1/_2$ множимое а отыскивается множитель; поэтому вопросъ рѣшается дѣленіемъ:

$$6:7\frac{1}{2}=6:\frac{15}{2}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}.$$

Частное показываеть, что $\frac{4}{5}$ числа $7^{1}/_{2}$ составляють 6; вначить, на 6 руб. можно купить $\frac{4}{5}$ арш., стоимостью въ $7^{1}/_{2}$ руб. за аршинъ.

Задача 3. За $7^3/_4$ фунта чаю заплачено $18^3/_5$ рубля. Сколько стоить фунть чаю?

Для ръшенія задачи надо найти такое число, которое, повторенное слагаемымъ $7^3/_4$ раза *), составить $18^3/_5$. Здъсь $18^3/_5$ произведеніе, $7^5/_4$ —множитель, а отыскивается множимое; значить, задача ръшается дълепіемъ:

$$18\frac{3}{5}:7\frac{3}{4}=\frac{93}{5}:\frac{31}{4}=\frac{93\cdot 4}{5\cdot 31}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}.$$

Фунть чаю сгонть $2^2/_5$ руб., т.-е. 2 руб. 40 кон.

Задача 4. За ⁷/₈ арпина матеріи заплачено 14 руб. Сколько стоить аршинь этой матеріи?

¹⁾ Сокращенное выраженіе; «повторить какое-нибудь число слагаемым» 7⁸/₄ раза» означаеть: «повторить какое-нибудь число слагаемым» 7 разъ и къ сумма добавить ²/₄ этого числа».

Очевидно, за ариниъ матерін заплачено таков число руб., котораго $\frac{7}{8}$ составдяють 14 руб., т.-е. такое число, которое слъдуеть умножить на $\frac{7}{3}$, чтобы получить 14 руб. Здъсь 14 произведеніе, $\frac{7}{8}$ —миожитель, а отыскивается множимое:

$$14: \frac{7}{8} = \frac{14 \cdot 8}{7} = 16.$$

Аршинъ матеріи стоить 16 рублей.

Замъчаніе. Чтобы быстріве сообразить, какцив дійствіемь рівшается та или другая задада, содержащая дробныя числа, полезно поставить себі вопрось, какимь дійствіемь надо было бы рівшать ту же самую задачу, если бы въ ней дробныя числа были замінены цілыми. Возьмемь, напр., приведенную выще задачу 4-ю и измінимь ее, положимь, такь: «за 2 арш. матерін заплачено 14 руб. Сколько стоить аршинь этой матерін?» Конечно, въ такомь виді задача эта рівшается діленіємь. Тівмь же дійствіємь она должна рівшаться и тогда, когда число аршинь задано дробное.

177*. Измівненіе произведенія и частнаго при измівненіи данных в чисель. Произведеніе в частное дробных в чисель измівняются такъ же, какъ произведеніе и частное ділых в чисель.

Эти измененія полезно выразить теперь въ болье общемъ виде, чемъ мы выражали прежде (§ 79—83), и именю такъ:

1) Если умножимъ одного изъ сомножителей на нанов-либо число, то и произведение умножител на то же число.

Такъ, если въ примъръ: .

$$5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

умножныть множные на $\frac{7}{4}$, то произведение будсть:

$$(5,\frac{7}{4}),\frac{2}{3},$$
 r.e. $(5,\frac{7}{4},\frac{2}{3})$

Переставивъ въ втомъ произведении сомножителей, 7/4 г н 3/3, отчего произведение пе измънится, мы получимъ:

$$5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{.7}{4} = \frac{10}{3} \cdot \frac{.7}{4}$$

Такимъ образомъ, прежнее произведение умножийось тоже на ⁷/₄.

Такъ какъ мпожимое и мпожителя можно помънять мъстами, то сказанное относится и ко множителю.

- -, 2) Если раздълимъ одного изъ сомножителей на какое-либо число, то и произведение раздълится на то же число, потому что раздълитъ на какое-либо число все равно, что умножить на обратную дробь.
- ооратную дрооб.
 3) Если умножимъ дълиное на какое-нибудь число, то и частное умножится на то же число.

Дъйствительно, дълимое есть произведение, а дълитель и частное—сомножители; значить, умножая дълимое и оставляя дълителя безъ перемъны, мы умножаемъ произведение и оставляны вляемъ безъ измънения одного сомножителя; а это возможно только тогда, когда другой сомножитель, т.-е. частное, умножится на то же число.

4) Если умножимъ дълителя на наное-либо число, то частное раздълится на то же число.

Дъйствительно, умножая дълителя и оставляя дълищов безъ перемъны, мы умножаемъ одного сомножителя и оставляемъ безъ измъненія произведеніе; а это можетъ быть только тогда, когда другой сомножитель, т.-е. частпое, раздълится на то же число.

Подобныя же ваключенія можно вывести отпосительно дъленія ділимаго и ділителя на какое-либо число.

VII. Именованныя дроби.

178. Раздробленіе. Пусть требуется % пуда раздробить въ зо потники. Для этого раз-

пробласыв 1/0 пуда спачала въ фунты, а потомъ въ 30-

7/9 пуда раздробляемъ въ фунты. 1 пудъ имъетъ 40 фунтовъ; слъд., 7/9 пуда содержать 7/8 сорока фунтовъ. Чтобы найти 7/9 сорока, надо умножить 40 на 7/9 (пли 7/9 на 40):

$$\frac{7}{9}$$
 × 40 = $\frac{280}{9}$ (фунта).

 $\frac{280}{9}$ фунта раздробляемь вь зол. 1 фунть имьеть 96 золотн., слъд., $\frac{280}{9}$ фунта содержать $\frac{280}{9}$ числа 96 зол.; чтобы найти $\frac{280}{9}$ числа 96-ти, надо 96 умножить на $\frac{280}{9}$ (или $\frac{280}{9}$ на 96): $\frac{280}{9} \times 96 = \frac{8960}{9} = 2896 \frac{2}{3}$ (волотн.).

Такимъ образомъ, раздробленіе дробнаго именованнаго числа производится такъ же, какъ и цълаго числа, т.-е. посредствомъ умноженія на единичное отношеніе.

179. Превращеніе. Пусть требуется ³/₄ ар ш. превратить въ версты, т.-е. узнать, какую часть версты составляють ³/₄ арш. Для этого превратимъ ихъ сначала въ сажени, а потомъ—въ версты.

3/4 а.р.ш. превращаемъ въ сажени. Это впачить узнать, какую часть сажени, т.-е. 3-хъ аршинъ, составляють 3/4 аршина; другими словами: на какую дробь надо умножить 3, чтобы получить 3/4. Это узпается дъвенень:

$$\frac{3}{4}:3=\frac{1}{4}$$

Зпачить, 3/4 apm. состаплятоть 1/4 сажени.

 $_{1}^{1}/_{4}$, сажени, превращаемъ въ версты, т.-е. 500 сажень, составляетъ $_{1}^{1}/_{4}$ сажени; другими словами: на какую дробь надо умножить 500, чтобы получить $_{1}^{1}/_{4}$. Это узнается дъленіемъ;

$$\frac{1}{4}:500 = \frac{1}{2000}$$

слъд., $\frac{1}{6}$ саж. составляеть $\frac{1}{2000}$ версты.

«Пакимъ образомъ, превращеніе дробнаго именованнаго числа производится такъ же, какъ и цѣлаго числа, т.-с. посредствомъ дѣленія на единичное о̀тношеніе.

180. Задачи. І, О братить въ составное именованное число $\frac{7}{800}$ версты.

Это значить: узнать, сколько въ $\frac{7}{800}$ вер. заключается саженъ, аршинъ и т. д. Это дълается посредствомъ раздробленія:

$$\frac{7}{800} \text{ версты въ сажени: } \frac{7}{800} \times 500 = \frac{35}{8} = 4^3/8 \text{ (саж.).}$$

• Оставляя въ сторонт 4 сажени, граздробимъ:

 $\frac{3}{8}$ cam. By apmend: $\frac{3}{8} \times 3 = \frac{9}{8} = \frac{11}{8}$ (apm.).

. Оставляя въ сторонъ 1 арш., раздробимъ:

 $^{1}/_{8}$ арш. въ вершки: $^{1}/_{8}\times 16=2$ (вершка).

Следовательно, 7 версты 4 саж. 1 арт. 2 верш.

2. Какую часть сутокъ составляють 3 часа 7⁵/₈ мин.?

Эта вадача р\шается посредствомь превращенія:

75/в минуть превращаемь въ часы:

$$\frac{61}{6} : 60 = \frac{61}{r_1 \cdot 480} : (aca).$$

Приозвинемъ 3 часа:
$$\frac{61}{480} + 3 = \frac{1501}{480}$$
 (часовъ). $\frac{1501}{480}$ часа превращае тъ въ сутки. $\frac{1501}{480}$: $24 = \frac{1501}{11520}$ (сутокъ).

- 181. Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и приненіе дробных именованных чисель можно производить двоякимь путемь: 1) пли, выразивь всё данныя именованным числа вы мёрахы одного и того же названія, поступають съ ними, какъ съ дробями отвлеченными; 2) или, обративь всё данныя въ составныя именованным числа, поступають съ ними, какъ съ цёлыми именованными числами. Напр.:
- 1) Сложить: 3/7 версты+2 в. $15^3/4$ саж.+101 саж. 1 арш. $2^1/2$ вершка.

2/7 версты превращаемь въ составное именованное число:

$${}^{6}/_{7} \times 500 = \frac{1500}{7} = 214^{2}/_{7} (\text{cask.}).; {}^{2}/_{7} \times 3 = {}^{6}/_{7} (\text{apm.})$$

$${}^{6}/_{7} \times 16 = \frac{96}{7} = {}^{6}/_{7} (\text{nepmr.}).$$

Слъд., ⁸/₂ в.=214 саж. 13⁵/₂ вершк.

3/4 сижени прегращаемъ въ составное именованное число:

$$3/4 \times 3 = 9/4 = 2^1/4$$
 (арш.), $1/4 \times 16 = 4$ (вершк).
Слъд., $15^3/4$ саж =15 саж. 2 арш. 4 вершк.

Теперь сложимь, какъ складываются цёлыя составныя

² версты 331 саж. 1 арш. 4³/₁₄ вершка.

Можно было бы выразить вст данныя вътвершкахъ или иныхъ мърахъ одного и того же названія и потомъ складывать, какъ дроби отвлеченныя. Полученное отъ сложенія простое именованное число можно было бы, въ случав надобности, обратить въ составное.

2) У и ножить 4 пуда 62/3 фунта на 4/2.

Чтобы умножить какое-нибудь число на 4/7, надо умножить это число на 4 и результать разделить на 7:

$$\frac{4 \text{ п. } 6^2/_5 \mathring{\Phi}}{(\times 4)^{5/3}} \frac{\mathring{\Phi}}{(\times 4)^{5/3}} \frac{\mathring{\Phi}}{(\times 4)^{5/3}} \frac{16 \text{ п. } 26^2/_3 \mathring{\Phi}}{(\times 4)^{5/3}} \frac{106^2/_3}{(\times 4)^{5/3}} \frac{320}{3} \frac{106^2/_3}{3} \frac{320}{3}$$

3) Раздълить 2 стоим $12^1/_2$ дест. на $2^5/_8$ дести. Обращаемъ оба данныя числа въ дести:

$$2 \times 20 = 40$$
 (дест.); $-40 + 12^{1}/_{2} = 52^{1}/_{2}$ (дести).

Теперь производимъ дѣленіе:

$$52^{1}/_{2}:2^{5}/_{8}=\frac{105}{2}:\frac{21}{8}=\frac{105.8}{21.2}=20$$
 (pass).

4) Раздълить 5 боч. $7^3/_4$ ведра на $^2/_3$.

Чтобы раздёлить какое-инбудь число на $^2/_3$, надо умножить это число на 3 и результать раздёлить на 2:

$$\frac{5 \text{ боч. } 7^3/_4 \text{ ведра}}{\times 3}$$
 $\frac{15 \text{ боч. } 23^1/_4 \text{ ведра}}{1}$
 $\frac{2}{1}$
 $\frac{253}{40}$
 $\frac{40}{40}$
 $\frac{253}{63^1/_4} = \frac{253}{4}$.

отдълъ пятый.

Десятичныя дроби

(десятичныя числа).

I. Главнъйшія свойства десятичныхъ дробей.

182. Десятичныя доли. Доли, получаемыя оть раздѣлемія какой-нибудь единицы на 10, на 100, на 1000, вообще на такое число равныхъ частей, которое выражается 1-ею съ однимъ или съ нѣсколькими нулями, называются десятичными долями.

Такимъ образомъ, десятичныя доли, послъдовательно уменьшающияся, будуть слъдующия:

Изъ двухъ неодинаковыхъ десятичныхъ долей обльшая называется десятичною долею высшаго разряда, а меньшая—десятичною долею низшаго разряда. Каждая десятичная доля содержить въ себъ 10 десятичныхъ долей слъдующаго низшаго разряда. Такъ:

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$$
; $\frac{1}{100} = \frac{10}{1000}$; $\frac{1}{1000} = \frac{10}{10000}$ π 7. π .

183. Десятичная дробь. Дробь, у которой знаменатель есть 1 съ однимъ или съ нъсколькими нулями, наз десятичной: таковы, напр., дроби:

$$\frac{3}{10}$$
, $\frac{27}{100}$, $\frac{27401}{1000}$, $3\frac{1}{1000}$ M T. H.

Въ отличіе отъ десятичныхъ дроби, имъющія какихъугодно знаменалелей, наз. обыкновенными.

Десятичныя дроби представляють много удобствъ сравнительно съ обыкновенными Поэтому свойства ихъ и дъйствія надъ ними полезно разсмотрёть особо отъ дробей обыкновенныхъ.

184. Десятичное число. Въ цыферномъ изображеніи цёлаго числа изъ двухъ рядовъ стоящихъ цыфръ правая всегда означаетъ единицы, въ 10 разъ меньшія, нежели лѣвая. Условимся распространить это значеніе мѣстъ и на тѣ цыфры, которыя могутъ быть написаны вправо отъ простыхъ единицъ. Положимъ. напр., что въ такомъ изображеніи:

6 3, 4 8 2 5 9...

цыфра 3 означаеть простыя единицы. Тогда цыфра 4 означаеть единицы, въ 10 разъ меньшія, нежели простыя единицы, т.-е. десятыя доли; 8 означаеть сотыя доли, 2—тысячныя, 5—десятитысячныя, 9—стотысячныя и т. д. Чтобы не ошибиться въ значеніи мѣсть, условимся отдѣлять запятою цѣлое число оть десятичныхъ долей. На мѣста недостающихъ долеи, а также и на мѣсто цѣлаго числа, когда его нѣтъ, будемъ ставить нули. Напр., при такихъ условияхъ выраженіе 0,0203 означаеть: 2 сотыхъ 3 десятитысячныхъ.

Цыфры, стоящія направо оть запятой, называются десятичными знанами.

Число. написанное при помощи десятичныхъ знаковъ (п цълаго числа, если опо есть), принято называть десятичнымъ числомъ.

185. Изображеніе десятичной дроби безъ знаменателя. Всякую десятичную дробь мы можемъ написать безъ знаменателя, въ видъ десятичнаго числа. Пусть папр, дана десятичная дробь $\frac{32736}{1000}$. Снача за исклю-

чимь изъ нея цѣлое число; получимъ $32\frac{736}{1000}$. Теперь представимъ ее такъ:

$$\frac{32736}{1000} = 32 + \frac{700}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{6}{1000} = 32 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000}$$

Значить, дробь эту можно изобразить такимъ образомъ:

$$\frac{32736}{1000}$$
=32,736

Это легко провърить, раздробивъ въ десятичномъ числъ 32,736 цълыя единицы и всъ десятичныя доли въ доли самыя мелкія (въ тысячныя), что проще всего сдълать такъ: такъ какъ цълая единица содержить въ себъ 10 десятыхъ, го 32 цълыхъ составляють 320 десятыхъ; приложивъ къ нимъ 7 десятыхъ, получимъ 327 десятыхъ. Такъ какъ десятал доля содержить въ себъ 10 сотыхъ, то 327 десятыхъ составляють 3270 сотыхъ; приложивъ къ нимъ 3 сотыхъ, получимъ 3273 сотыхъ. Такъ какъ 1 сотая=10 тысячнымъ, то 3273 сотыхъ=32730 тысячныхъ; приложивъ къ этому числу еще 6 тысячныхъ, получичъ данную дробъ 32736 тысячныхъ.

Пусть еще дана десятичная дробь $\frac{578}{100000}$, въ которой въть цълаго числа. Представимъ ее такъ:

$$\frac{578}{100000} = \frac{500}{100000} + \frac{70}{100000} + \frac{8}{100000} =$$

$$= \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{8}{100000}.$$

Слъд., дробь эта изобразится такимъ образомъ:

$$\frac{578}{100000} = 0,00578.$$

Правило. Чтобы десятичную дробь написать безъ знаменателя, пишутъ зя числителя и отдѣляютъ въ немъ запятою съ правой стороны столько десятичныхъ знакозъ, снолько есть нулей въ знаменатель (для чего иногда съ лъвой стороны числителя приходится написать нъсколько нулей).

Въ послѣдующемъ изложеніи мы всегда будемъ предполагать (если не будетъ сдѣлано особой оговорки), что десятичная дробь изображена безъ знаменателя, въ видѣ десятичнаго числа.

Замѣчаніе. Приписываніе нулей справа или слѣва десятичнаго числа не измѣняетъ его величины. Напр., кажлое изъ чиселъ:

7,05 7,0500 007,05

выражаеть одно и то же число: 7 цълыхъ, 5 сотыхъ, такъ какъ 500 десятитысячныхъ равно 5 сотымъ, а 007 выражаеть просто 7.

186. Какъ читается десятичная дробь.

Сначала прочитывають цёлое число (а когда его нёть, то говорять: ,,нуль цёлыхь"); затёмь читають число, написанное послё запятой, какь бы оно было цёлое и прибавляють названіе тёхь долей, которыми десятичное изображеніе дроби оканчивается; напр., 0,00378 читается: 0 цёлыхъ 378 стотысячныхъ. Значить, десятичная дробь, написанная безъ знаменателя, прочитывается такъ, какъ если бы она была изображена при помощи числителя и знаменателя.

Впрочемъ, десятичную дробь, у которой очень много десятичныхъ знаковъ, предпочитаютъ читать иначе: разбиваютъ всё десятичные знаки, начиная отъ запятой, на грани, по 3 знака въ каждой грани (кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть одинъ и два знака); затѣмъ читаютъ каждую грань, какъ дѣлое число, добавляя къ названію числа первой грани слово "тысячныхъ", второй грани—,милліонныхъ", третьей—,билліонныхъ" и т. д.; къ названію числа послѣдней грани добарляютъ названіе долей выражаемыхъ послѣдней грани добарляютъ названіе долей выражаемыхъ послѣднею дыфрою дроби. Такийъ образомъ

дробь: 0,028 306 000 07 читается такъ: 0 цѣлыхъ, 28 тысячныхъ, 306 милчіонныхъ, 0 билліонныхъ, 7 стобилліонныхъ.

187. Сравненіе десятичных дробей. Пусть желаечь узнать, какая изъ следующихь дробей больше:

0,735 п 0,7349987.

^ .f.

Для этого къ дроби, у которой десятичныхъ знаковъ меньше, принишемъ, (хотя бы только мысленно) съ правой стороны столько нулей, чтобы число десятичныхъ знаковъ въ объихъ дробяхъ оказалось одно и то же:

0,7350000, 0,7349987.

Теперь видимъ, что первая дробь содержитъ 7 350 000 десятичилліонныхъ, а вторая—7 349 987 десятимилліонныхъ (значитъ, уравниваечъ числа десятичныхъ знаковъ мы привели объ дроби къ одному знаменателю), такъ какъ 7350000 больше 7349987, то первая дробь больше второй.

Подобнымъ образомъ легко убъдиться, что изъ двухъ десятичныхъ дробей та больше, у которыхъ число цълыхъ больше; при разенствъ цълыхъ—у которой число десятыхъ больше; при равенствъ цълыхъ и десятыхъ — у которой число сотыхъ больше, и т. д

188. Перенесеніе запятой. Перенесечь въ дроби 3,274 запятую на одинъ знакъ вправо; тогда получимъ новую дробь: 32,74. Въ первой дроби дыфра 3 означаетъ простыя единицы, а во второй—десятки; слъд., значеніе ея увеличилось въ 10 разъ. Цыфра 2 означаетъ въ первой дроби десятыя доли, а во второй—простыя единицы; слъд., ея значеніе тоже увеличилось въ 10 разъ. Также увидимъ, что значеніе и прочихъ цыфръ увеличилось въ 10 равъ. Такимъ образомъ:

отъ перенесенія запятой вправо на одинъ знакъ десятичная дробь увеличивается въ 10 разъ.

Отсюда следуеть, что оть перенесенія запятой вправо на 2 знака десятичная дробь увеличивается въ 100 разъ, на 3 знака—въ 1000 разъ, и т. д.

Обратно: отъ перенесенія запятой вліво на одинъ знакъ десятичная дробь уменьшается въ 10 разъ, п, слёд., на 2 знака—въ 100 разъ, и т. д.

189. Увеличеніе или уменьшеніе десятичной дроби въ 10, въ 100, въ 1000 и т. д. разъ. Пусть требуется увеличить дробь 0,02 въ 10000 разъ. Для этого достаточно перенести въ ней запятую на 4 знака вправо. Но въ данной дроби имѣется всего два десятичныхъ знака. Чтобы было 4 знака, пришшемъ съ правой стороны 2 нуля, отчего величина дроби не нямѣнится. Перенеся потомъ запятую на конецъ числа, получимъ цѣлое число 0200 или просто 200.

Пусть требуется уменьшить ту же дробь въ 100 разъ. Для этого достаточно перенести въ ней запятую на 2 знака въво. Но въ данной дроби въйво отъ запятой имћется голько одинъ знакъ. Чтобы было два зпака, припишемъ съ лѣвой стороны 2 нуля (одинъ для цѣлаго числа), отчего величина дроби не измѣнится. Перенеся потомъ запятую на два знака влѣво, получимъ 0,0002.

Всякое цёлое число можно разсматривать, какъ десятичную дробь, у которой вправо оть запятой стоить сколько угодно нулей; поэтому увеличеніе и уменьшеніе цёлаго числа въ 10 разъ, въ 100 разъ, въ 1000 разъ и т. д. совершаются такъ же, какъ и десятичной дроби. Напр., если уменьшимъ цёлое число 567,000... въ 100 разъ, то получимъ 5,67.

II. Дѣйствія надъ десятичными дробями.

Споженіе.

190. Сложеніе десятичныхъ дробей производится такъ же, какъ и сложеніе цѣлыхъ чиселъ. Пусть, напр., требуется сложить: 2,078 + 0,75 + 13,5602. Подпишемь эти дроби другь подъ другомъ дакъ, чтобы цѣлыя стояли подъ цѣлыми, десятыя подъ десятыми, сотыя подъ сотыми п т. д.:

$$\begin{array}{ccc}
2,078 & 2,0780 \\
+ 0,75 & + 0,7500 \\
\underline{13,5602} & 13,5602 \\
\hline
16,3882 & 16,3882
\end{array}$$

Начинаемъ сложеніе съ наименьшихъ долей. Оть сложенія десятитысячныхъ получимъ 2; пишемъ эту цыфру подъ чертою. Оть сложенія тысячныхъ получимъ 8; пишемъ 8 подъ чертою. Отъ сложенія сотыхъ получимъ 18; по 18 сотыхъ = 10 сотыхъ +8 сотыхъ; десять сотыхъ составляють одну десятую; запомнимъ ее, чтобы приложить къ десятымъ долямъ слагаемыхъ, а 8 сотыхъ напишемъ подъ чертой. Продолжаемъ такъ дъйствіе до конца.

Чтобы не опибиться при подписываніи, полезно уравнять нулями числа десятичныхъ знаковъ во всёхъ слагаемыхъ (какъ это сдёлано у насъ при вторичномъ сложеніи).

Вычитаніе.

191. Вычитаніе десятичныхъ дробей производится такъ же, накъ и вычитаніе цълыхъ чиселъ. Пусть, напр., требуется вычесть:

 $-\frac{5,709}{0,30785}$ $\frac{5,40115}{100}$

Годиншемъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы одного названія стояли другъ подъ другомъ. Чтобы вычесть послъднія деб цыфры вычитаемаго, возьмемь

изъ 9 тысячныхъ 1 тысячную и раздробимъ ее въ десятитысячныя; ислучимъ 10 десятитысячныхъ. Изъ нихъ возъмемъ одну и раздробимъ ее въ стотысячныя; тогда вмъсто 10 десятитысячныхъ и 10 стотысячныхъ. Значить, цыфру 5 вычитаемаго надо вычесть исъ 10, цыфру 8—изъ 9, а цыфру 7—изъ 8.

Такъ же производится вычитание десятичной дроби изъ цълаго числа; напр.:

 $-\frac{3}{1,873}$ ее въ десятыя; отъ нихъ беремъ одну и раздробляемъ $\frac{3}{1,127}$ ее въ десятыя; отъ нихъ беремъ одну и раздробляемъ ее въ сотыя; отъ сотыхъ беремъ 1 сотую и раздробляемъ ее въ тысячныя. Отъ этого вмъсто 3 цълыхъ получимъ. 2 цълыхъ, 9 десятыхъ, 9 сотыхъ и 10 тысячныхъ. 3начитъ, цыфру 3 вычитаемаго придется вычесть изъ 10, цыфры 7 и 8—изъ 9, а цыфру 1—изъ 2.

Можно также предварительно уравиять нулями числа десятичныхь знаковъ въ уменьшаемомъ и вычитаемомъ и затъмъ производить вычитаніе:

Умноженіе.

192. Разсмотримъ два случая, первыи — когда одинъ изъ сомножителей цълое число, второй — когда оба сомножителя дроби.

Примъръ 1. 3,085×23. Примъръ 2. 8,375×2,56.

Если бы въ этихъ примърахъ мы изобразили десятич-

извели дъйствіе по правплу умноженія обыкновенныхь дробей, то получили бы:

1)
$$\frac{3085}{1000} \times 23 = \frac{3085 \times 23}{1000} = \frac{70955}{1000} = 70,955,$$

2) $\frac{8375}{1000} \times \frac{256}{100} = \frac{8375 \times 256}{1000 \times 100} = \frac{2144000}{100000} = 21,44000 = 21,44.$

Слъд., для обоихъ случаевъ мы можемъ вывести слъдующее общее правяло.

Правило. Чтобы умножить десятичныя дрсби, отбрасывають въ нихъ запятыя, перемножають полученныя цѣлыя числа и въ произведеніи отдѣляютъ запятою съ правой стороны столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ
есть во множимомъ и во множителѣ вмѣстѣ.

Дыйствіе всего лучше располагать такъ:

При этомъ запятыя не отбрасываются, а на нихъ только не обращають винманія при умножени цёлыхъ чисель.

Дъленіе.

193. Дѣленіе на цѣлое число. Пусть требуется раздѣлить 39,47 на 8. Написавъ десятичную дробь въ видѣ обыкновенной, мы можемъ произвести дѣленіе по правилу дѣленія обыкновенной дроби на цѣлое число:

$$39,47:8 = \frac{3947}{100}:8 = \frac{3947}{100.8} = \frac{3947}{800}.$$

Тогда въ частномъ мы получимъ обыкновенную дробь. Если желательно, чтобы частное было выражено деся-

тпиною дробью, то лучше всего производить дъление на цълое число такъ, какъ будетъ сейчасъ указано.

194. Приближ'енное частное. Расположимъ дъйствие такъ, какъ оно располагается при дълении цълыхъ чиселъ:

39,47 8 Делимь 39 целыхь на 8; получимь въ частномь 4 целыхь, и въ остаткъ 7 целыхъ. Раздробляемь остатокъ въ десятыя доли и сносимъ 4 десятыхъ делимъ 74 десятыхъ на 8; получимъ въ частномъ 9 десятыхъ н въ остаткъ 2 десятыхъ. Раздробляемь остатокъ въ сотыхъ н остаткъ 2 десятыхъ. Раздробляемь остатокъ въ сотыхъ делимаго; получаемъ 27 сотыхъ. Раздриявъ ихъ на 8, получаемъ въ частномъ 3 сотыхъ и въ остаткъ 3 сотыхъ.

Положимъ, что мы на этомъ прекратили дъйствіе. Тогда получимь приближенное частное 4,93. Чтобы узнать, насколько оно разнится отъ точнаго частнаго, найдемъ это точное частное и сравнимъ его съ приближеннымъ. Чтобы получить точное частное, достаточно къ числу 4,93 приложить дробь, которая получится отъ дёленія остатка (3 сотыхъ) на в получимъ 3/в единицы; отъ дъленій 3 сотыхъ на 8 получимъ 3/8 сотой. Значитъ, гочное частное равно суммѣ 4,83 + $^{3}/_{8}$ сотой. Отбросивъ $^{3}/_{8}$ сотой, мы сдълаемь ошибку, которая меньше одной сотой. Поэтому говорять, что 4,93 есть приближенное частное съ точностью до 1/100. Если вмёсто того, чтобы отбрасыеать 3/8 сотой, мы дополнимъ эту дробь до целой сотой (увеличивъ ее на ⁵/₂ сотой), то сдѣлаемъ ошноку, тоже меньшую 1/100; тогда получимь другое приближенное частное: 4,93 + 0,01, т.-е. 4,94, тоже съ точностью до $\frac{1}{100}$. Число 4.93 меньше, а 4.94 больше точнаго частнаго; поэтому говорять, что первое число есть приближенное частчое съ недостатиомъ, а второс-съ избытномъ.

Если станемъ продолжать дъйствіе дальше, обращая остатки въ десятичныя доли, все болье и болье мелкія, го будемъ получать приближенныя частныя съ большею гочностью. Такъ, если обратимъ остатокъ з сотыхъ въ гысячныя доли и раздълимъ зо тысячныхъ на 8, то получимъ приближенное частное 4,933 (съ недостаткомъ) или

4,934 (съ избыткомъ), при чемъ ошибка

 39,47 | 8
 менѣе ¹/1000.

 74
 4,93375
 Продолжа

 27
 можемъ инс

 30
 (какъ въ в

 60
 нолучниъ т

 40
 тивномъ слу

Продолжая дёленіе далёе, мы можемь иногда дойти до остатка о (какъ въ нашемъ примёрё); тогда получимъ точное частное. Въ противномъ случаё приходится довольствоваться приближеннымъ частнымъ, при чемъ опибку можно сдё-

лать накъ угодно малою. Если, напр., мы желаемъ найти приближенное частное съ точностью до одной милліонной, то прекращаемъ дъленіе тогда, когда въ частномъ получилась цыфра милліонныхъ долей.

Такъ же поступають при дъленіи цълаго числа на цълое, если желають получить частное въ видъ десятичной дроби.

Правило. Дъленіе десятичной дроби на цълое число производится такъ же, какъ и дъленіе цълыхъ чиселъ, при немъ остатки обращаютъ въ десятичныя доли, все болье и болье мелкія, и дъйствіе продолжаютъ до тъхъ поръ, пока или не получится точное частное, или въ приближенномъ

частномъ не получится цыфра тъхъ десятичныхъ долей, которыми хотятъ ограничиться:

195. Замѣчаніе. Изъ двухъ, приближенныхъ, частныхъ, одно съ недостаткомъ, а другое съ избыткомъ, наноенибудь одно точно до 1/2 десятичной доли послъдняго разряда, а именно такимъ частнымъ будетъ частное съ недостаткомъ, если остатокъ меньше 1/2 дълителя, и частное съ избыткомъ, если остатокъ больше 1/2 дълителя. Разсмотримъ, напр., дъреніе 39,47; 8. Положимъ, мы беремъ приближенное частное 4,93, при которомъ остатокъ 3 меньше половины 39,47 в дълителя (т.-е. меньше 4). Тогда точти 4,93 ное частное будетъ 4,93 н 3/8 сотой; значитъ, оно отличается: отъ числа 4,93 на 3/8 сотой (меньше 1/2 сотой), а отъ числа 4,94 на 5/8 сотой (болье 1/2 сотой) (въ этомъ случав, значитъ, выгодиве взять, частное съ недостаткомъ).

39,47 8 Возьмемь теперь въ томъ же при74 4,933 мъръ приближенное частное 4,933,
при которомъ остатокъ 6 больше
половины дълителя. Точное частное будеть 4,933+6/8 тысячной; значить, оно отличается отъ числа

4,933 на $^{6}/_{8}$ тысячной (болье $^{1}/_{2}$ тысячной), а отъ числа 4,934 на $^{2}/_{8}$ тысячной (менье $^{1}/_{2}$ тысячной) (въ этомъ случав, значить, выгоднье взять частное съ избыткомъ).

196. Дѣленіе на десятичную дробь. Пусть требуется раздѣлить 3,753 на 0,85. Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на 85/100, достаточно это число умножить на 100 и результать раздѣлить на 85. Умноживъ дѣлимое на 100, получимъ 375,3. Остается раздѣлить это число на 85. Такимъ образомъ мы приходимъ къ дѣленію десятичной дроби на дѣлое число:

375,3:85=4,415...

Точно такъ же поступають при дъленіи цълаго числа на десятичную дробь; напр.:

7:0,325=7000:325=21,538...

Правило. Чтобы раздълить на десятичную дробь, отбрасывають въ дълитель запятую и увеличивають дълинель; во сколько увеличивають дълитель; во сколько увеличилов дълитель; затъщь дълять по правилу дъленія на цълов число.

III. Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя

- 197. Прецварительное замъчаніе. Такъ какъ дъйствія надъ десятичными дробями производятся проще, чъмъ надъ дробями обыкновенными, то часто бываетъ полезно обыкновенныя дроби обратить въ десятичныя *). Укажемъ два способа такого обращенія.
- 198. Первый способъ: посредствомъ разложенія знаменателя на простыхъ множителей. Пусть требуется обратить дробь ⁷/40 въ десятичную. Для этого зададимся вопросомъ: нельзя ли привести дробь ⁷/40 къ такому знаменателю, который выражался бы 1-ю съ нулями? Если бы это оказалось возможнымъ, то мы получили бы тогда десятичную дробь, написанную при помощи числителя и знаменателя, а такую дробь мы затъмъ не затруднились бы написать и безъ знаменателя.

^{*)} Впрочемъ, при совершеніи вычисленій надъ дробями десятичными и обыкновенными совмъстно не всегда необходимс приводить эти дроби къ одному виду; если, напр., требуется 0.567 умножить на $^3/_7$, то ньть надобности обращать $^3/_7$ въ десятичную дробь; можно 0.567 умножить на 3 и результить раздълить на 7 .

Чтобы привести песократимую дробь къ другому знаменателю, надо оба ен члена умножить на одно и то же число. Чтобы узнать, на какое число надо умножить 40 для полученія 1 сь нулями, примемь во вниманіе, что всякое число, выражаемое единицею съ нулями, разлагается тольно на множителей 2 и 5, причемъ оба эти множителя входять въ разложение одинаковое число разъ, именно столько разъ, сколько стоить нулей при 1. Напр.:

Замътивъ это, гразложимъ 40 на простыхъ множителей:

$$--40=2:2.2.5.$$

Изъ этого разложенія видимь, что если умножить 40 два раза на 5, то послѣ умноженія получится такое число, въ которое 2 и 5 будуть входить множителями одинаковое число разь (по 3 раза); значить, тогда получится 1 съ нулями (съ 3 нулями). Чтобы дробь не измѣнила своей величины, надо и числителя ея умножить 2 раза на 5:

$$\frac{7}{40} = \frac{7.5.5}{40.5.5} = \frac{175}{1000} = 0,175.$$
Примъры: 1) $\frac{7}{8} = \frac{7}{2.2.2} = \frac{\cdot 7.5.5.5}{2.2.2.5.5.5} = \frac{875}{1000} = 0,875;$
2) $\frac{4}{125} = \frac{4}{5.5.5} = \frac{4.2.2.2}{5.5.5.2.2.2} = \frac{32}{1000} = 0,032;$
3) $\frac{11}{20} = \frac{11}{2.2.5} = \frac{11.5}{2.2.5.5} = \frac{55}{100} = 0,55.$

198,а. Какія обыкновенныя дроби обрашаются въ десятичныя и какія не обращаются. Изъ указаннаго способа обращенія обыкновенпыхъ дроей въ десятичныя можно вывести спедующія два следствія:

1) Если знаменатель обыкновенной дроби не содержитъ нинакихъ иныхъ множителей, кромъ 2 и 5, то такая дробь

обращается въ десятичную, при чемъ эта десятичная дробь имъетъ столько десятичныхъ знаковъ, сколько разъ въ внаменателъ обыкновенной дроби, послъ сокращенія ея, повторяется тотъ изъ множителей 2 и 5, который входитъ въ него большее число разъ.

Пусть, напр., въ знаменатель обыкновенной дроби, посль ен сокращения, больше повторяется множитель 2 и пусть этоть множитель входить 4 раза. Тогда придется добавлять множителя 5, и столько разъ, чтобы посль добавления оба множителя входили по 4 раза; значить, посль умножения въ знаменатель получится 1 съ 4-мя нулями, а потому и десятичная дробь будеть имъть 4 десятичные знака. Напр.:

$$\frac{7}{80} = \frac{7}{2.2.2.2.5} = \frac{7.5.5.5}{80.5.5.5} = \frac{875}{10000} = 0,0875.$$

2) Если знаменатель обыкновенной дроби содержить въ себъ накихъ-либо множителей, отличающихся отъ 2 и 5, и эти множители не сокращаются съ числителемъ, то такая дробь не обращается въ десятичную.

Возьмемъ, напр., дробь $^{35}/_{84}$, въ которой знаменатель содержить множителей 3 и 7 (пменно 84=2.2.3.7). Посмотримъ прежде всего, не сокращаются ли эти множители съ числителемъ. Одинъ изъ нихъ, именно 7, сокращается; послъ сокращенія получимъ $^5/_{12}$. Такъ какъ 12 содержить множителя 3, то эта дробь не обращается въ десятичную, потому что, на какія бы цълыя числа мы ни умпожали знаменателя ел, никогда не получимъ 1 съ нулями.

Такія дроби можно обращать лишь въ приближенныя десятичныя, какъ сейчась упидимъ.

199. Второй способъ: посредствомъ дъленія числи-, теля на знаменателя. Эготъ способъ болье употребителень, чыть первый, такъ какъ онъ примъщимъ и къ такциъ обижновеннымъ дробямъ, которыя обращаются только и приближенныя десятичныя дроби.

Пусть требуется обратить дробь 23/8 въ десятичную Число 23/8 можно разсматривать, какъ ча-23 | 8 стное отъ дъленія 23 на 8 (§ 173, прав. 1-е). Но мы видели, что частное отъ деленія цълыхъ чисель можно найти въ видъ десятичной дроби, точно или приближенно. Для этого надо только обращать остатдоли, все деленія въ десятичныя доли, все болье и болье мелкія, до тыхь порь, пока не получится въ остаткъ нуль, или пока не получатся въ частномъ доли того разряда, дальше котораго не желають итти. Въ нашемъ примъръ получилось точное частное; слъд., ²³/₈=2,875. Пусть еще требуется обратить 3/14 въ десятичную дробь Такъ какъ эта дробь несократима и знаменатель ея со держить простого множителя 7, отличнаго оть 2 и 5, то ее недьзя обратить въ десятичную; однако, можно найти такую десятичную дробь, которая приблизительно равняется 3/14 и притомъ съ какою угодно точностью. Если, напр., мы желаемь найти десятичную дробь, которая отличалась бы отъ $\frac{3}{14}$ менье, чьмь на $\frac{1}{1000}$, то достаточно найти 3 десятичные знака оть дъленія 3 на 14:

Приближенное частное 0,214 или 0,215

20 0,214...

отличается отъ точнаго частнаго, т.-е.

отъ 3/14. менъе, чъмъ на 1/1000 Если
продолжать дъленіе дальше, то степень
приближенія становится все больше п
больше. Однако дъленіе никогда не можетъ окончиться,
потому что въ противномъ случать мы получили бы десятичную дробь, которая въ точности равнялась бы 3/14,
что невозможно; такимъ образомъ, продолжая дъленіе.
мы можемъ получить въ частномъ сколько угодно десятич
ныхъ знаковъ.

200. Конечныя и безконечныя десятичныя дроби. Десятичная дробь, у которой число деся-

тичных знаковъ можетъ быть какъ угодно велико, наз. безконечною, а та, у которой число десятичныхъ знаковъ опредъленное, наз. конечною дробью.

Можно сказать, что обышновенная дробь, которая не можеть обратиться еъ конечную десятичную, обращается въ безконечную десятичную.

201. Періодическія дроби. Безконечная десятичная дробь, у которой одна или нісколько цыфрь неизмінно повторяются въ одной и той же послідовательности, называется періодическою десятичною дробью, а совокупность повторяющихся цыфрь называется періодомь этой дроби.

Періодическія дроби бывають чистыя и смѣшанныя. Чистою періодическою дробью называется такая, у которой періодь начинается тотчась послѣ запятой, напр.: 2,36 36 36....; смѣщанною—такая, у которой между запятой и первымъ періодомь есть одна или нѣсколько цыфръ не повторяющихся, напр.: 0,5 23 23 23..... Періодическія дроби пишуть сокращенно такъ:

> вмѣсто 2, 36 36.... пишутъ:2,(36) • 0, 5 23 23 . • 0,5(23)

202. Безконечная десятичная дробь, получающаяся при обращеніи обыкновенной дроби, должна быть періодическою. Убъдимся въ этомъ свойствъ на какомъ-нибудь примъръ. Пусть желаемъ обратить дробь 19/7 въ десятичную. Такъ какъ знаменатель 7 не составленъ изъ множителей 2 и 5 и данная дробь несократима, то опа не можеть обратиться въ конечную десятичную. Слъд., она обращается въ безконечную десятичную. Чтобы получить нъсколько ен первыхъ десятичныхъ знаковъ, станемъ дълить 19 на 7. Такъ какъ дъленіе не можетъ окончиться, то в с е в о змож и и хъ остатковъ должно быть безконечно много.

Но остатки всегда меньше д'интеля; поэтому различныхъ остатновь не можеть быть больше 6 сивдующихь: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Изъ этого следуеть, что при доста-

точномъ продолжении дъления остатнепремъпно начнуть и о в т о-ряться. Дъйствительно, 7-й оста-

 10
 30
 токъ оказался такой же, какъ и первый. Но если повторияся остатокъ, то, приписавъ къ нему 0, мы получимъ такое же дѣинмое, какое было рапьше (50); значитъ, въ частномъ начнутъ получаться тѣ же цыфры какія были рапьше, т.-е. въ частномъ получится періодическая дробъ. Въ

нашемъ примъръ повторение началось съ первой цыфры послѣ запятой и потому получилась чистая періодическая дробь. Въ другихъ примърахъ можетъ случаться, что повтореніе начиется не съ 1-й цыфры, а, напр., сь 3-й; тогда получится смѣщанная періодическая дробь.

203*. Обыкновенная дребь, обращающаяся въ безконечную десятичную, есть предъль этой десятичной Пусть, напр., мы нашли, что отъ обращенія обыкновенной дроби 3/14 получилась такая десятичная безконочная дробь; 0,214285... Тогда мы можемъ утверждать (§ 199), что:

число 0,2 равнится оть
$$^{3}/_{14}$$
 менже, чжмъ на $^{1}/_{10}$, в 0,21 в в в в в в $^{1}/_{100}$ в 0,214 в в в в в в $^{1}/_{100}$ в т. д.;

значить, расность

$$\frac{3}{14} - 0,214285...$$

при неограниченномь увеличении числа деситичныхъ знаковъ въ вычитаемомъ деластся и остается меньше какого угодно малаго даннаго числа, а это, согласно определению предела т), означаеть, что

Обыкновенно въ подобныхъ равенствахъ слово "предълъ" опускаютъ и иншутъ просто:

$$^{3}/_{14}=0,214285...$$

284*. Предълъ данной періодической дроби (т.-е. та обыкновенная дробь, которая обращается въ эту періодическую дробь) всего проще находится при помощи выводимой въ алгебръ формулы для предъла суммы членовъ геометрической убывающей безконечной прогрессіи. Примъняя эту формулу къ неріодическимъ дробямъ "), легко получить слъдующія 2 правила:

Правило 1-е. Чтобы обратить чистую періодическую дробь въ обынновенную, берутъ ея періодъ числителемъ, а знаменателемъ пишутъ цыфру 9 столько разъ, скольку цыфръ въ періодъ.

Примѣры:
$$0,(7) = \frac{7}{9}$$
; $2,(05) = 2\frac{5}{99}$; $0,(063) = \frac{63}{999} = \frac{7}{111}$.

Правило 2-е. Чтобы обратить смѣшанную періодическую дробь въ обыкновенную, изъ числа, стоящаго до второго періода, вычитаютъ число, стоящее до перваго періода, и полученную разность берутъ числителемъ, а знаменателемъ пишутъ цыфру 9 столько разъ, сколько цыфръ въ періодѣ, со столькими нулями на концѣ, сколько цыфръ между запятой и періодомъ.

Примъры: 1) 0, 35252... =
$$\frac{352-3}{990} = \frac{349}{990}$$

2) 0,26444... = $\frac{264-26}{900} = \frac{238}{900} = \frac{119}{450}$
3) 5,7883... = $5\frac{78-7}{90} = 5\frac{71}{90}$
5,7888... = $\frac{578-57}{90} = \frac{521}{99} = 5\frac{71}{90}$

**) См. Олементарную алгебру А. Киселева, § 286, примъны 3 и 4.

^{&#}x27;) См. напр., "Элементарную геометрію" А. Кисе-

205 . Замъчанія. 1) Знаменатель обыкновенной дроби, получаємой отъ обращенія чистой періодической, не содержить множителей 2 и 5.

Дъйствительно, этотъ знаменатель до сокращенія оканчивается цыфрою 9 и потому не дълится ни на 2, ни на 5; слъд., онъ не дълится на эти числа и послъ сокращенія дроби (если сокращеніе возможно).

2) Знаменатель обыкновенной дроби, получаемой отъ обращенія смъщанной періодической, содержитъ множителя 2 или 5, или и того, и другого.

Дъйствительно, этотъ знаменатель до сокращенія оканчивается нулемь и потому дълится и на 2, и на 5. Оба эти множителя могли бы сократиться съ числителемъ только тогда, если бы числитель оканчивался тоже нулемъ. Но числитель получается отъ вычитанія числа, стоящаго до перваго періода, изъ числа, стоящаго до второго періода; такъ какъ послъдняя цыфра періода не можетъ оказаться одинаковою съ послъднею цыфрою до періода (если періодъ взятъ върно), то числитель не можетъ оканчиваться нулемъ; поэтому и послъ сокращенія (если оно возможно) въ знаменатель останется множитель 2 или 5, или и тоть, и другой вмъстъ.

206. Обыкновенная дробь, знаменатель которой не содержить множителей 2 и 5, обращается въ чистую періодическую.

Hamp.:
$$\frac{3}{7} = 0$$
, (428571) ; $\frac{2}{3} = 0$, (6) ; $\frac{5}{11} = 0$, (45) .

Дъйствительно, во-1) такая дробь должна обратиться въ какую-нибудь періодическую (§ 202): во-2) эта періодичеческая дробь не можеть быть смъшанною, потому что смъшанная періодическая дробь, какъ мы видъли, обращается въ такую обыкновенную дробь, знаменатель когорой содержить множителей 2 и 5. Слъд., она должна обратиться въчистую періодическую.

207. Обыкновенная дребь, знаменатель которой, послъ сстрещения, вмъстъ съ другими множителями, содержить

множителя 2 или 5, обращается въ смѣшанную періодическую.

Напр.:
$$\frac{35}{42} = \frac{5}{6} = 0.8(3)$$
; $\frac{8}{15} = 0.5(3)$; $\frac{119}{450} = 0.26(4)$ и т. д.

Дъйствительно, во-1) такая дробь должна обратиться въ какую-нибудь періодическую; во-2) эта періодическая дробь не можеть быть чистою, потому что чистая періодическая дробь, какъ мы видъли, происходить оть такой обыкновенной, знаменатель которой не содержить множителей 2 и 5. Слъд., она должна обратиться въ смъшанную періодическую.

208*. Безнонечныя десятичныя дроби не-періодическія. Безконечныя десятичныя дроби могуть быть и не-періодическими (таковы, напр., десятичныя дроби, выраждющія прраціональныя числа, какь $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ и пр.). Точныя величины такихь дробей служать и ред в и ами, къ которымь дроби стремится при неограниченномъ увеличеніи числа ихъ десятичныхъ внаковъ.

Полезно убѣдиться, что къ безконечнымъ десятичнымъ дробямъ, періодическимъ и не-періодическимъ, примѣнимъ (за малымъ исключеніемъ, которое будетъ указано ниже) тотъ признакъ нера венства десятичныхъ дробей, который быль изложенъ нами рапьше (§ 187) для дробей конечныхъ, а именно: «изъ двухъ десятичныхъ дробей та больше, у которой число цѣлыхъ больше; при равенствъ цѣлыхъ и десятыхъ, у которыхъ число сотыхъ больше, и т. д.» Сравнимъ, напр., двъ такія безконечныя десятичныя дроби:

— у которыхь число ціныхь, десятых в и сотыхь одно и то же, но число тысячныхь въ первой дроби меньше числа тысячных во второй (хотя бы на 1). Обозначимъ точныя величины этихъ дробей соотвітственно буквами а и b; тогда мы можемъ написать:

пред. 0.325796... = a в пред. 0.326023... = b.

Убъдимся, что a < b. Очевидно, что 0.326 < b, и потому, если мы покажемъ, что a < 0.326, то тогда и подавно будетъ: a < b. Тукъ какъ, согласпо теоремъ 2-й предыдущаго параграфа,

пред. 0,00099... =
$$\frac{9-0}{9000} = \frac{9}{9000} = \frac{1}{1000} = 0,001$$
,

то дробь 0,326 можно представить такъ:

$$0.326 = 0.325 + 0.001 = 0.325 + \pi$$
 ред. $0.00099...$ = пред. $0.325999...$

Сравнивая теперь персмённыя числа 0,325796... и 0,325999..., видимъ, что первое града остается меньшимъ второго на число, превосходящее 2 тысячныхъ; поэтому предълъ перваго числа долженъ быть меньше предъла второго числа, т.-е. a < 0,326 п, значить, a < b.

Исключеніс изъ этого признака сравненія десятичныхъ дробей представляють собою нікоторые случан, когда конечная десятичная дробь сравниваєтся съ такон безконечной періодической пробью, у которой періодъ состоить изъ цифры 9. Такъ дробь 0,326 не больше, а равна дроби 0,325999...

IV. Метрическая система мъръ.

209. Описаніе. Изь системъ именованныхъ міръ.



употребляемыхъ въ другихъ государствахъ, особенно замъчательна своею простотою французская или метрическая система мъръ, принятая во многихъ странахъ.

За единицу длины въ этой системъ приплта одна десятимилліонная часть четверти земного меридіана; эта еди-

пппа называется «метръ» *).

^{*)} Всявдствіе и экоторыкъ пограшностей при измъреніи дуги меридіана употробляємый въ практикъ метръ не вполив равенъ десятимилліонной долъ четверти меридіана (парижскаго, какъ предполагалось).

Метръ раздѣлястся на 10 равныхъ частей, $^{1}/_{100}$ метра, въ свою очередь, на 10 равныхъ частей, п т. д. Съ другой стороны, употребляются мѣры въ 10 метровъ, въ 100 метровъ п т. д. Чтобы назвать десятичныя подраздѣленія метра, присоединяють къ слову «метръ» латинскія слова: деци (для обозначенія $^{1}/_{10}$), центи ($^{1}/_{100}$), милди ($^{1}/_{1000}$); такъ, деци метръ означаеть $^{1}/_{10}$ часть метра, центи метра, центи метра. Вирочемъ, слово «центиметръ» чаще замѣняется францурскимъ словомъ «сангиметръ»

Мъры, кратныя метра, называются при помощи греческихь словь: дзка (10), гекто (100), кило (1000); такъ, декаметръ означаеть 10 метровъ, гектометръ— 100 метровъ, километръ— 1000 метровъ.

Таблица метрическихъ мъръ длины:

- 1 метръ=10 дециметрамъ= 100 сантиметрамъ= 1000 миллиметрамъ;
- 10 метровъ=1 декаметру; 100 метровъ=1 гектометру. 1000 метровъ=1 книометру.



1 дециметръ, разділенный на сантиметры и минлимотры (вънатуральную величину).

Полезпо заметить следующія приблизительныя соотношенія метрическихъ меръ съ русскими:

I метръ= $22^{1}/_{2}$ вершка=I,4 аршина= $3^{1}/_{4}$ фута. I дюймъ= $2^{1}/_{2}$ сант.: I вершокъ= $4^{1}/_{2}$ сант.; I футъ= $30^{1}/_{2}$ сант.; I километръ почти $^{15}/_{16}$ версты *).

^{*)} Точнъе: 1 метръ = 22,4971 вершка = 1,4061 арш. = 3,2806 фута: 1 аршинт = 0,7112 метра.

Названія метрическихъ мірь принято сокращенно обозначать такъ:

> мегръ . . . м. дециметръ . . дцм. сантиметръ . . см. миллиметръ. . мм. километръ. . . км.

Пля изміренія поверхностей употребляются квадратныя мъры: кв. метръ, кв. декаметръ и т. п. Каждая изъ такихъ мёръ содержить въ себё 100 мёръ слёдующаго низшаго разряда; такъ, кв. дециметръ содержитъ 100 кв. сан-- тиметровъ.

Пля измёренія площади полей употребляется «аръ» и «гентаръ». Аръ есть нвадратный денаметръ; гентаръ равень 100 арамъ. Гектаръ приблизительно равенъ 0,9 нашей десятины *).

Для измъренія объемовъ служать кубическія мъры: куб. метръ, куб. дециметръ и т. д. Каждая изъ этихъ мъръ содержить въ себъ 1000 мъръ слъдующаго низшаго разряда; такъ, кубическій метръ содержить 1000 куб. дециметровь. Объемь, равный куб. метру, называется «стерь», если онъ служить для измъренія количества дровь, угля и т. п.

Для измъренія вмъстимости сосудовь (и объемовь жидкихъ и сыпучихъ тълъ) употребляется «литръ». Литръ есть объемъ, равный одному кубическому дециметру. На наши мъры онъ приблисительно равенъ 0,3 гарица **). Употребительны также децилитры и центилитры, декалитры и гектолитръ.

Единицею въса служить «граммъ». Это есть (почти точно) въсъ одного кубическаго сантиметра чистой перегнанной воды при температуръ 4° Цельсія (или 3,2° Рео-

^{*)} Гектаръ=0,91530 десятины; десятина=1,0925 гект.
• *) Литръ=0,3049 гарнџа=61,0266 куб. дюйма.

мюра) въ безвоздушномъ пространствъ. Граммъ подраздъляется на депиграммы, сантиграммы и миллиграммы; въса, пратные грамма, суть: декаграммъ, гектограммъ и килограммъ.

· На наши, мъры и эти пединицы приблизительно составляють:

 1 граммъ= $22^{1}/_{2}$ доли=около $^{1}/_{4}$ золотника; 1 килограммъ= $2^{1}/_{2}$ фунта (точнъе: 2,44 фунта); 1 пудъ=16,38 килогр.; 1 фунтъ= $409^{1}/_{2}$ граммамъ *).

Употребительна еще мъра «тонна», равная 1000 килограммовъ (приблизительно бі пудъ) * 1).

Монетною единицею служить «франкъ». Это есть серебряная монета, въслиая ровно 5 граммовъ и содержащая приблизительно на 9 частей чистаго серебра 1 часть мъди. Сотая часть франка называется «сантимъ». На наши деньги 1 франкъ приблизительно равенъ 371/2 ноп.

210. Вслъдствие того, что единичное отношение мъръ метрической системы равно основанию нашей системы счисления, всъ дъйствия надъ именованными числами, выраженными по этой системъ, выполняются проще, чъмъ по наной-либо другой системъ.

Пусть, напр., требуется раздробить въ метры 2 килом. 5 гектом. 7 декам. 3 метра 8 децим. 4 сантим. и 6 миллим. Такъ какъ километры это—тысячи метровъ, гектометры—сотни метровъ и т. д., то, очевидно, данное составное именованное число выразится въ метрахъ такъ: 2573,846 метровъ.

1 граммъ =16,074866 аптек. грана.

^{*)} Граммъ = 22 505 долей = 0,2344 золоти.; золоти. = 4,2658 грам.

Килограммь=2,4419 фунта; фунть=0,40951241 килогр.

**) Въ настоящее время метрическая система примъняется также и въ аптекахъ. Нашимъ Торговымъ Уставомъ установлено слъдующее соотношеніе между мърами аптекарскаго въса и метрическими:

¹ аптек. фунть=358,32336 граммамъ; 1 » гранъ=62,208916 миллиграммовъ; 1 килограммъ=2,7907754 аптект. фунта;

Перенося въ отой десятичной дроби запятую вправо или глъво, найдемъ, что: 2573 846 метр. = 257,8846 декам. = = 25,73846 гектом. = 2,573846 килом. = 25738,46 децим. = = 257384,6 сантим. = 2573846 миллим.

Такъ же легко совершается превращение простого именованнаго числа въ составное. Пусть, напр., требуется превратить 2380746 миллиграммовъ въ мёры высшихъ разрядовъ. Такъ 'какъ граммъ = 1000 миллигр., то: 2380746 миллигр. = 2380,746 грамм. = 2 килогр. 3 гектогр. 8 декагр. 7 депигр. 4 сантигр. 6 миллигр.

Дъйствія надъ метрическими именованными числами совершаются такъ, какъ надъ десятичными дробями.

211. Удобства метрической системы. Изъ сказаннаго о метрической системы можно заключить, что она обладаеть слёдующими тремя важными удобствами:

1) мёры различныхь величинь находятся въ простой зависимости оть основной мёры, метра; 2) единичное отношеніе мёрь одно и то же для всёхъ разрядовь и всёхъ величинь (кромь, конечно, поверхностей и объемовь);

3) это единичное отношеніе равно основанію нашей системы счисленія, вслёдствіе чего дёйствія надъ ихенованными числами значительно упрощаются.

отдълъ шестой.

Отношеніе и пропорція.

I. Отношеніе.

212. Опредъленіе. Отношеніемъ одного значенія величины къ другому значенію той же величины наз. отвлеченное число, на которог надо умножить второг значеніе, чтобы получить первог.

Такъ, отношеніе длины 15 арш. къ длинѣ 3 арш. есть число 5, потому что 15 арш.=3 арш. \times 5: отпошеніе вѣса 3 фунт. къ вѣсу 15 фунт. есть число $^{1}/_{5}$ такъ какъ 3 ф.=15 ф. \times $^{1}/_{5}$, отношеніе отвлеченнаго числа 25 къ отвлеченному числу 100 равно $^{1}/_{4}$ потому что 25=100 \times $^{1}/_{4}$.

Значенія величины, между которыми разсматривается отношеніе, наз. членами отношенія; первое значеніе есть предыдущій члень, второе значеніе—послѣдующій члень.

Когда отношеніе есть цёлое число, то оно показываеть, сколько разь предыдущій члень солержить въ себ'є посл'єдующій; такъ, отношеніе 15 арш. къ 3 арш. равно цёлому числу 5; это значить, что 15 арш. содержать въ себ'є 3 арш. 5 разъ.

Когда отношеніе есть дробь, то оно означаєть, какую дробь послідующаго члена составляєть предыдущій; такъ, отношеніе 3 фунт. къ 15 фунт. есть дробь $^{1}/_{5}$, это вначить, что 3 фунта составляють $^{1}/_{5}$ 15-и фунтовъ.

Изъ того, что предыдущій члень равень послідуюмему, умноженному на отношеніе, слідуеть, что предыдущій члень можно разсматривать,—какъ ділимое, исслідующій члень—какъ ділителя (въ смыслі множимаго), а отношеніе—какъ частное (въ смыслі множителя). Поэтому нахожденіе отношенія принято обозначать впакомь діленія; напр., отношеніе 2 пудовь къ 10 фунтамь обозначають такъ:

Заметимъ, что отношение именованныхъ чиселъ всегда можетъ быть заменено отношениемъ отвлеченныхъ чиселъ. Для этого достаточно выразить именованныя числа въ одной и той же мере и взять отношение получившихся отвлеченныхъ чиселъ. Напр., отношение 10 фув. 16 лот. къ 3 лот. равно отношению 336 лот. къ 3 лот., а это отношение равно отношению отвлеченныхъ чиселъ 336 къ 3.

Въ послъдующемъ изложении мы будемъ большею частью говорить только объотношении отвлечены хъ, чиселъ.

- 213. Зависимость между членами отношенія и самимъ отношеніемъ. Эта зависимость та же самая, какая существуеть между дълимымь, дълителень и частнымь. Такъ:
- 1) Предыдущій члень равень послідующему, умноженному на отношеніе (ділимое равно ділителю, умноженному на частное).
- 2) Посивдующій члень равень предыдущему, дёленному на отношеніе (дёлитель равень дёлимому, дёленному на частное).
- 3) Отношеніе увеличивается (или уменьшается) во столько разъ, во сколько увеличивается (или уменьшается) предыдущій члень.
 - 4) Отношение уменьщается (или увеличивается) во столько.

разъ, во сколько увеличивается (или уменьщается) послъдующій членъ.

- 5) Отношение не измъняется, если оба члена отношения увеличены или уменьшены въ одинаковое число разъ.
- 214. Нахожденіе неизвъстнаго члена отношенія. Если въ отношеніи -- неизв'єстенъ предыдушій члень, то онь находится умноженіемь (зависимость 1); если же непавъстенъ послъдующій, то онъ получается дъленіемъ (завис. 2); напр. (неизвъстный члень обозна-'ченъ буквой x):
 - 1) x: $7^{1}/_{2}=2$; отсюда: $x=7^{1}/_{2}\times 2=15$. 2) 15: x=2; x=15: $2=7^{1}/_{2}$.
- 215. Сокращеніе отношенія. Если оба члена отношенія д'алятся на одно и то же число, то мы можемъ сократить ихъ на это число, отчего отношение не измънится (завис. 5); напр.:

отношение 42:12 равно отношению 7:2.

216. Уничтоженіе дробныхъ членовъ. Если умножимь оба члена отношенія на одно и то же число, то отношение не изивнится (завис. 5). Пользуясь этимъ свойствомъ, ны можемъ всякое отношение, у котораго одинь или оба члены дробные, замѣнить отношеніемь цълыхъ чиселъ. Пусть, напр., дано отношение $\frac{7}{3}$: 5. Умножимъ оба члена этого отношенія на 3; тогда оно замѣнится отношеніемь пълыхь чисель 7:15.

Если оба отношенія—дроби, то достаточно привести ихъ къ одному знаменателю и затъмъ его отбросить; напр., отношеніе $\frac{5}{14}$: $\frac{10}{21}$, послъ приведенія дробей къ одному внаменателю, обратится въ такое: $\frac{15}{43}$: $\frac{20}{43}$ Откинувъ знаменателя, мы увеличимь оба чисна въ 42 раза, отчего отношение не изивинтся: тогда получимь отношение дьлыхь чисель 15 120 или 3 : 4. -

-217. Обратныя отношенія. Два отношенія на вываются обратными, если предыдущій члень одного изь имхъ служить послідующимь членомь другого и обратно. Таковы, напр., отношенія: 10 : 5 и 5 : 10.

н. Пропорція

218. Опредъленіе. Равенство, выражающее, что одно отношеніе равно другому отношенію, наз. пропорцієй.

Замътивъ, папр., что каждое изъ двухъ отношеній 8 пуд.: 4 пуда и 20 арт.: 10 арт. равно одному и тому же числу 2, мы можемъ написать пропорцію:

Пропорцію эту можно прочитать такъ:

отношение 8 пуд. къ 4 пуд. равно отношению 20 арш. къ 10 арш.;

или 8 пуд. относятся къ 4 пуд. такъ, какъ 20 арш. относятся къ 10 арш.

Замвинвъ гъ написанной пропорціи оба отношенія пменованныхъ чисель отношеніями отвлеченныхъ чисель, получимъ пропорцію отвлеченныхъ чисель:

$$8:4=20:10;$$
 Eug $\frac{8}{4}=\frac{20}{10}$

· Изъ 4-хъ чиселъ, составляющихъ пропорцію, первое и послъднее называются крайними, второе и третье — средними членами пропорціп.

Мы будемъ предполагать далье, что всь члены пропорціи— отвлеченныя числа.

219. Измънение членовъ пропорціи бэзъ нарушенія ея. Если измънимъ члены пропорціи такъ, что первое отношеніе

останется равнымъ второму; то говерятъ, что пропорція не нарушена. Легко уб'єдиться, что:

1) Есян оба часна перваго или оба члена второго отношенія увеличать, или уменьшимъ иъ одинаковое часло разъ. то пропорція не нарушител,

потому что отъ этого не изменится ни первое, им второе отношения; напр.:

12: 6=48:24 36:18=48:24 12: 6=18:8

2) Если оба предыдущіє или оба послідуваціє члена увеличимъ или уменьшимъ въ одинаковоз число разъ, то прогорція не парушится,

потому что отъ этого каждое отношение измёнится одинаково; напр.:

12:6= 48:24 36:6=144:24 12:2= 48:8

3) Если всв члены увеличимъ или уменьшимъ въ одинаковое члело разъ, то пропорція не нарушится,

потому что отъ этого не измѣнится ни первое, ни второе отношенія; напр.:

12:6=48:24 6:3=24:12

Такимъ образомъ, не нарушая пропорціп, мы можемъ увешичвать или уменьшаль въ одинаковое число разь каждый крайній съ каждамъ среднимъ.

220*. Сопращеніе пропорція. Если какой-вибудь изъ крайнихь чисновъ имбеть общаго дблителя съ какимъ-пибудь изъ среднихь чисновь, то эти члены можно сократить на ихъ общаго двлителя (клаждый крайній съ каждымъ среднизь можно уменьшать въ одилаковое число разъ). Напр.:

r: 20=35: 25 a: 4=35: 5x: 4= 7: 1 221*. Уничтожение дробныхъ членовъ. Покажемъ на трехъ примърахъ, какъ можно это сдёлать:

$$(1) 10 : 3=2 : 3/6.$$

Огкинемъ въ 4-мъ членъ внаменателя; отъ этого мы увеличить его въ 5 разъ; тотобы пропорція не нарушилась, надо увеличить въ 5 разъ какой-нибудь изъ среднихъ членовъ (каждый крайній съ каждымъ среднимъ можно увеличивать въ одинаковое число разъ). Умножимъ на 5 второй или третій члены; тогда получимъ двъ пропорціи съ цълыми членами: 10:15=2:3 и 10:3=10:3.

2) 8:
$$\frac{7}{9}=10:\frac{35}{36}$$
.

Приведемъ об'є дроби къ общему знаменателю и откинем є его; этимъ мы увеличимъ въ одинаковое число разъ крайній и средній члены, отчего пропорція не нарушится: 8:28—10:35.

3)
$$3: \frac{7}{8} + \frac{17}{11} = \frac{119}{114}$$
.

Приведемъ всѣ члены къ общему внаменателю и отбросимъ его; втимъ мы увеличимъ всѣ нлены въ одинаковое число разъ, отчего пропорція не нарушится:

222. Важное свойство пропорціи. Во всяной пропорціи произведеніе крайних у членов у равно произведенію средних у.

Такъ, въ пропорцін 8: 4=20: 10 произведеніе крайнихъ равно 80 и произведеніе среднихъ также равно 80.

Чтобы доказать это свойство для всякой пропорціи, • обозначимь члены пропорціп такнийь образомь:

По свойству отношенія мы можемъ написать:

1 членъ=2 чл. хотношеніе;

3 члент=4 чл. хотношеніе;

при чемь оба отношения, входящія въ эти равенства, должны быть равны между собою (по опредъленю пропорція).

Умножимъ объ части перваго равенства на 4-й членъ, а объ части второго равенства—на 2-й членъ; отъ этого, очевидно, равенства не нарушатся, и мы получимъ:

1 чл. ×4 чл. =2 чл. ×отн. ×4 чл.

3 чл. ×2 чл. =4 чл. ×отн. ×2 чл.

Правыя части этихъ равенствъ состоять изъ одинаковыхъ множителей и потому равны другъ другу; значитъ, равны и лъвыя части равенствъ, т.-е.:

Но 1-й и 4-й члены суть крайніе, а 3-й и 2-й—средніе; значить, произведеніе крайнихь равно произведенію сред

*Вообще, обозначивъ члены пропорціи буквами a, b, c и d и каждое изъ равныхъ отношеній, составляющихъ пропорцію, буквою q, мы будемъ имbть:

$$a:b=c:d$$
, откуда: $a=bq$, $c=dq$.

Чтобы уравнять правыя части двухъ последнихъ равенствъ, умножимъ обе части перваго изъ пихъ на d и обе части второго на b:

$$ad = bqd$$
, $cb = dqb$

Правыя части этичъ равенствь равны, слъд., должны бытъ равны и лъвыя части:

ad = cb, что и требов. доказать.

223. Обратное предложеніе. Мы доказали такимъ образомъ, что если 4 числа составляють пропорцію, то произведеніе крайнихъ чиселъ равно произведенію среднихъ; докажемъ теперь обратное предложеніе, а именно:

если произведеніе двухъ какихъ-нибудь чиселъ равно произведенію двухъ другихъ чиселъ, то изъ этихъ 4-хъ чиселъ можно составить пропорцію, беря сомножителей одного произведенія за крайніе, а сомножителей другого произведенія—за средніе члены пропорціи.

Возьмемъ, папр., два пары чиселъ: 4 п 21, 7 и 19, такихъ, чло произведение первой нары равно произведению второй нары;

$$4\times21=7\times12$$

Раздѣлимъ оба эти равныя произведенія на каждое изъ слѣдующихъ 4-хъ произведеній: 4×7, 4×12, 21×7, 21×12, т.-е. на каждое изъ такихъ произведеній, въ которыхъ одинъ сомножитель взять изъ перваго произведенія (4×21), а другой—изъ второго произведенія (7×12). Очевидно, что если мы равныя числа раздѣлихъ на расныя числа, то получимъ равныя частвыя; значить:

$$\frac{4 \times 91}{4 \times 7} = \frac{7 \times 19}{4 \times 7}; \ \frac{4 \times 21}{4 \times 12} = \frac{7 \times 19}{4 \times 12}; \ \frac{4 \times 21}{21 \times 7} = \frac{7 \times 19}{21 \times 7};$$
$$\frac{4 \times 21}{21 \times 12} = \frac{7 \times 12}{21 \times 12}.$$

Сокративъ эти равенства, получимъ:

$$\frac{21}{7} = \frac{12}{4}$$
; $\frac{21}{12} = \frac{7}{4}$; $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$; $\frac{4}{12} = \frac{7}{21}$

Каждое изъ этихъ 4-хъ равенствъ есть пронорнія, въ которой крайніе члены суть сомпожители одного цзъ данныхъ произведеній, а средніе члены—сомножители цругого даннаго произведенія.

Вообще если 4 числа m, n, p и q таковы, что mn = pq, то, раздаливь оба части этого равенства на каждое изъ ч-хь предпедений. mp, mq, np и nq, получимь:

$$\frac{mn}{mp} = \frac{pq}{mp}, \frac{mn}{mq} = \frac{pq}{mq}, \frac{mn}{np} = \frac{pq}{np}, \frac{mn}{nq} = \frac{pq}{nq}$$

Сокративъ эти равен тва, найдечъ 4 пронорція:

$$\frac{n}{p} = \frac{q}{n}, \quad \frac{n}{q} = \frac{p}{n}, \quad \frac{m}{p} = \frac{q}{n}, \quad \frac{m}{q} = \frac{p}{n},$$

въ которыхъ крайними членами служатъ сомножители друпого изъ этихъ произведеній. 228,а. Провърко пропорціи. На основані доназапнаго обратнаго предлеженія, чтобы повърить пропорцію, достаточно убъдиться, что произпеденіе правних равно произведенію среднихь членовъ ея; напр., пропорція 4:7=868:1519 върна, потому что 1519, 4=6076 и 868.7=6076

224 Пахожденіе неизвѣстнаго члена про- порцій. Возьмемь пропорцію: $8:0,6=x:\frac{8}{4}$, въ которой неизвѣстень одинь изъ среднихь членовъ, обозначеный буквою x. Вь ней произведеніе крайнихь членовь $=8\times^2/4=6$; значить, произведеніе ел среднихь членовь тоже должно быть 6; но одинь изъ среднихь членовъ сать 0,6; значить, другой средній получится, если 6 раздълимь на 0,6:

x=6:0,6=60:6=10.

Танимъ образомъ, средній членъ равенъ произведенію крайнихъ, дъленному на другой средній.

Подобно этому, крайній членъ равенъ произведенію среднихъ, дъленному на другой крайній.

225. Перестановки членовъ пропорціп безъ нарушенія ея. Въ каждой пропорціп можно переставить: 1) средніе члены, 2) крайніе члены и 3) крайніе на місто среднихь, а средніе на місто крайнихь. Отъ такихь перестановскі пропорція не нарушится, потому что не нарушится равенство между произведеніемь краинихь и произведеніемь среднихъ членовь. Пусть, напр., имітемь пропорцію:

1)
$$4:7=12:21$$
.

Переставивъ въ исй средніе члены, нолучимъ:

2)
$$4:12=7:21$$
.

Переставимъ въ каждой изъ этихъ пропорции крайніе члены, тогда получимъ еще двъ пропорціи:

3)
$$21:7=12:4$$
; 4) $21:12=7:4$.

Наконейъ, переставимъ въ каждой изъ полученныхъ 4-хъ пропорий средніе на м'єсто крайнихъ и наоборотъ; тогда получимъ еще 4 пропорція:

- 5) 7:4=21:12; 7) 7:21=4:12;
- 6) 12:4=21:7; 8) 12:21=4:7.

Замѣчаніе. Въ каждой изъ этихъ 8-ми пропорцій можно было бы переставить отношенія, т.-е. поставить второе отношеніе первымъ, а первое — вторымъ; но отъ такой перестановки не получится новой пропорціи. Если, напр., въ пропорціи 5-й переставимъ отношенія, то получимъ не новую пропорцію, а ту, которая была получена ранѣе, именно подъ № 4. Слѣд., путемъ всевозможныхъ перестановокъ можно получить вмѣсто одной пропорціи 8 пропорцій.

226. Непрерывная пропорція. Пропорція называется непрерывной, если оба средніе или оба крайніе за члена равны другь другу. Таковы, напр., пропорція:

$$32:16=16:8;$$
 $20:5=80:20.$

Если въ последней пропорціи переставимъ второе отношеніе съ первымъ, то получимъ: 80:20 = 20:5; отсюда видно, что непрерывную пропорцію всегда можно представить такъ, что одинаковы будутъ оба средніе ея члена.

227. Среднее геометрическое. Повторяющійся члень непрерывной пропорціи называется среднимь геометрическимь числонь двухь другихь членовь пропорціи. Такь, 16 есть среднее геометрическое 32 и 8.

*Пусть требуется найти среднее геометрическое двухъ чисель 20 и 5. Назвавъ его x, получимъ, по опредъленію, такую пропордію: 20:x=x:5; откуда находимъ: $x^2=20.5=100$, $x=\sqrt{100}=10$. Исходя изъ этой формулы, можемъ опредълить среднее геометрическое двухъ чиселъ, какъ корснь квадратный изъ произведенія ихъ.

Это опредвиемие расширяють и на тоть случай, когда данныхъ чисемъ божве двухъ. Среднимъ геометрическимъ n данныхъ чисемъ называется норень n-овой степени изъ произведенія этихъ чисемъ.

· 228. Среднее ариометическое. Среднимъ ариометическимъ нъскольнихъ чиселъ называется частное отъ дъленія суммы этихъ чиселъ на число ихъ.

Такъ среднее ариеметическое 5-и чиселъ: 10, 2, 18, 4 и 6 равно:

$$\frac{10+2+18+4+6}{5} = 8.$$

- 229 г. Сложныя прспорціи. Паъ двухъ или болье пропорцій можно составить новыя пропорціи, называемыя с ложными, основываясь на следующихъ истинахъ:
- 1) Если соотвътственные члены нъсколькихъ пропорцій перемножимъ, то получимъ новую пропорцію.

Пусть, напр., им'темъ дв'т пропорцін:

Перемножимъ соотвѣтственные члены этихъ пропорціи; тогда получимъ такую сложную пропорцію:

У такой пропорціп каждое отношеніе равно произведенію отношеній данных пропорцій.

2) Если члены одной пропорціи раздѣлимъ на соотвѣтственные члены другой пропорціи, то получимъ новую пропорцію.

Напр., если раздълимъ соотвътственные члены данныхъ выше препорцій, то получимъ такую сложную пропорцію:

$$\frac{40}{8}:\frac{10}{4}=\frac{100}{10}:\frac{25}{5}$$
, r.-e. $5:2^{1}/_{2}=10:5$ (отношение = 2).

У такой пропорціи каждое отношеніе равно частном у оть дівленія отношеній данных пропорцій.

230. Производныя пропорціи. Изь одной пропорціи можно получить ивсколько другихь пропорцій, навываємыхь производными, основывансь на следующихь соображеніяхь.

Возьмемъ какое-нибудь отношеніе, напр., 21: 7. Если къ предыдущему его члену приложимъ послѣдующій, то получимъ новое отношеніе: (21+7): 7, которое, очевидно, больше прежняго на одпу единицу. Если же изъ предыдущаго члена вычтемъ послѣдующій (если это возможно, какъ въ нашемъ примѣрѣ), то получимъ новое отношеніе: (21—7): 7, которое моньше прежляго на одну единицу. Замѣтивъ это, возьмемъ какую-ипбуль пропорцію:

$$21:7=30:10$$

и составимъ изъ нея новую пропорцію такимъ образомъ:

$$(21+7): 7=(30+10): 10$$
 (1).

Эта пропорція върна, потому что каждое отношеніе въ ней больше отношеній данной пропорціп на одно и то же число, именно на 1. Составленную нами производную пропорцію можно высказать такъ:

сумма членовъ перваго отношенія относится къ его послъдующему члену, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ его послъдующему члену.

Составимъ теперь изъ данной пропорціи такую:

$$(21-7)$$
: $7=(30-10)$: 10 (2).

Эта пропорція върца, потому что каждое отношеніе въ ней меньше отношеній данной пропорціи на одно и то же число, именно на 1. Составленную нами вторую производную пропорцію можно высказать такъ:

разность членовъ перваго отношенія относится къ его послъдующему члену, какъ разность членовъ второго отношенія относится къ его послъдующему члену.

- Переставных средніе члены въ первой производной пропорцін и въ данной:

$$(21+7)$$
: $(30+10)=7:10$;
21:30=7:10.

Вь этихь двухъ пропорийхъ вторыя отношения опинаковы; вначить, первыя отношения должны быть равны;

$$(21+7):(30+10)=21:30.$$

Переставивъ средніе члены, получимъ:

$$(21+7): 21=(30+10): 30$$
 (3).

Эту третью производную пропорцію можно высказать такъ:

сумма членовъ перваго отношенія относится къ его предыдущему члену, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ его предыдущему члену.

Переставимъ средніе члены во второй производной пропорціи и въ данной:

$$(21-7): (30-10)=7:10$$
 $21:30=7:10.$ Откуда: $(21-7): (30-10)=21:30$ или $(21-7): 21=(30-10):30$ (4).

Эту 4-ю производную пропорцію можно высказать такъ: разность членовъ перваго отношенія относится къ его предыдущему члену, какъ разность членовъ второго отношенія относится къ его предыдущему члену.

Переставимъ средніе члены въ первой и второй производныхъ пропорціяхъ:

$$(21+7): (30+10)=7:10,$$
 $(21-7): (30-10)=7:10.$ Откуда: $(21+7): (30+10)=(21-7): (30-10)$ или $(21+7): (21-7)=(30+10): (30-10)$ (5)

Эту 5-ю производную пропорцію можно высказать такъ: сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ ихъ разности.

230,а. Свойство равных тотношеній. Возьмемь нісколько равных отношеній, напр., такія три отношенія:

$$40:10=20:5=8:2$$

Такъ какъ во всякомъ отношеніи предыдущій членъ равенъ послідующему, умноженному на отношеніе, то можемъ написать (принимая во вниманіе, что каждое данное отношеніе есть число 4):

Сложимъ лѣвыя части этихъ равенствъ между собою и правыя части между собою. Очевидно, что отъ сложенія равныхъ чиселъ мы должны получить и равныя суммы; поэтому:

$$40+20+8=10.4+5.4+2.4.$$

Въ правой части этого равенства отдёльно умножаются на 4 числа 10, 5 и 2 и полученныя произведенія складываются. Вмёсто этого можно предварительно числа 10, 5 и 2 сложить и затёмъ сумму умножить сразу на 4. Поэтому послёднее выведенное нами равенство мы можемъ переписать такъ:

$$40+20+8=(10+5+2) \cdot 4$$
.

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на сумму 10+5+2; отъ этого равенство не нарушится и мы получимъ:

$$(40+20+8):(10+5+2)=4.$$

Но каждое изъвзятыхъ нами равныхъ отношеній также равно числу 4; значить:

$$(40+20+8):(10+5+2)=40:10=20:5=8:2.$$

Такимъ образомъ: если нѣсколько отношеній равны другъ другу, то сумма всѣхъ предыдущихъ ихъ членовъ такъ относится къ суммъ всѣхъ послъдующихъ, какъ какой-нибудъ предыдущій относится къ своему послъдующему.

Всякая пропорція представляєть собою два равныя отношенія; значить, указанное нами свойство принадлежить также и пропорціи.

отдълъ седьмой.

Задачи на пропорціональныя величины.

І. Простое тройное правило.

. **231.** Величины, прямо пропорціональныя. Возьмемъ такую задачу: аршинъ сукна стоять 30 руб. Сколько стоять 15 арш. этого сукна?

Числа: 8 арш. и 15 арш. представляють собою два значенія одной и той же величины, именно количества аршинь сукна; числа: 30 руб. и искомое число руб. составляють гакже два значенія одной и той же величины, именно стоимости сукна. Значить, въ предложенной задачѣ говорится о двухъ величинахъ: о количествѣ аршинъ сукна и о стоимости ихъ. Эти величины зависять одна отъ другой, потому что съ измѣненіемъ одной изъ нихъ измѣнется и другая. Разсмотримъ эту вависимость подробиѣе.

Пусть количеству аршинъ сукна мы дали два какихънибудь произвольных значенія, напр.: 10 арш. и 25 арш.
Тогда стоимость ихъ получить тоже два значенія, но не
произвольныя, а вполив опредвленныя, находящіяся въ
соотвётствій со взятыми значеніями количества аршинъ.
Положимъ, мы не знаемъ, сколько стоятъ 10 аршинъ и
сколько стоять 25 аршинъ сукна. Но, и не зная этого,
им можемъ все-таки утверждать, что 25 арш. сукна стоятъ
болъе, чъмъ 10 арш. этого сукпа, и притомъ во столько
разъ болъе, во сколько разъ 25 арш. болъе 10 арш.; другими

словами, мы можемь утверждать, что отношеніє стоимости 25-ти арш. сукна къ стоимости 10-ти арш. этого сукна должно быть такое же, какъ и отношеніе 25-ти арш. къ 10-ти арш., что можно выразить такъ:

 $\frac{\text{стоимость 25-ти арш.}}{\text{стоимость 10-ти арш.}} = \frac{25 \text{ арш.}}{10 \text{ арш.}}$

Действительно, отношение 25-ти арш. къ 10 арш. есть число $2^{1}/_{2}$, и отношение стоимости 25-ти арш. къ стоимости 10-ти арш. тоже равно числу $2^{1}/_{2}$.

Какія бы два значенія количества эршинь міз ни взяли, всегда найдемь, что имь соотв'єтствують два опред'єленныя значенія стоимости, и что отношенію соотв'єтствующихь значеній стоимости.

Если двъ какія-нибудь величини зависять одна отъ другой такъ, что каждому значенію одной изъ нихъ сооть тствуеть одно опредъленное значеніе другой, при чемь отношеніе каждыхъ двухъ значеній одной изъ нихъ равно отношенію двухъ соотв тствующихъ значеній другой, то такія величины называются прямо пропорціональными (или просто пропорціональными).

Такъ, количество аршинъ сукна пропорціонально стоимости ихъ (или стоимость сукна пропорціональна количеству аршинъ сукна).

Весьма простой признань пропорціональности двухъ величинь состоить въ следующемь:

Если съ увеничениемъ произвольнаго вначения одной величины въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза и т. д. соотв'ятствующее значение другой величины увеличивается тоже въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза и т. д., то такия величины пропориюнальны.

Такъ, если произвольное число аршинъ сукна увеличимъ въ 2, 3, 4 и т. д. раза, то стоимость ихъ увеличится тоже въ 2, 3, 4 и т. д. раза; это—величины проиорціональным.

Подобно этому можно сказать также, что:

стоимость товара пропорціональна его вѣсу (если товарь продается на вѣсь, напр., чай);

въсъ однороднаго тъла пропорціоналенъ его объему (напр., въсъ желъза);

длина пути, проходимаго движущимся равномърно тъломъ (напр., поъздомъ желъзной дороги) пропорціональна продолжительности движенія;

илата рабочимъ пропорціональна числу ихъ (если каждый рабочій получаеть одинаково);

величина дроби пропорціональна ея числителю; и т. п.

232. Ръшеніе способомъ приведенія къ единицъ. Уяснивъ зависимость двухъ величинъ нашей задачи, выразимъ ходъ ръшенія ся слъдующими строчками.

Стоимость сукна пропорціональна числу аршинь его; поэтому 1 арш. стоить въ 8 разъ менте, чти 8 арш.,

а 15 арш. стоять въ 15 разъ болве, чвить 1 арш.; но 8 арш. стоять 30 рублей;

значить, 1 аршинь стопть $\frac{30}{8}$ руб.,

а 15 аршинь стоять $\frac{30}{8} \cdot 15 = 56 \frac{1}{4}$ руб.

Способъ, которымъ мы рѣшили эту задачу, наз. приведеніемъ нъ единицѣ, такъ какъ по этому способу одно изъ условій задачи приводится къ 1 (такъ, въ приведенной задачѣ мы узнали стоимость 1 аршина).

- **282,а.** Рѣшеніе посредствомъ пропорціи. Стоимость сукна пропорціональна числу аршинъ его; поэтому 15 аршинъ стоять болье 8-ми аршинъ во столько разъ, во сколько 15 болье 8; значить, обозначивъ искомую стоимость черезъ-x, получимъ пропорцію: x: 30=15: 8; окнуда: $x=(30\times15)$: $8=56^{1}/4$ руб.
- 238. Величины, обратно пропорціональныя. Возьмежь такую задачу: 6 человъкъ рабочихь окан-

чивають и же отботу въ 18 дней; во сколько дней окончать ту же работу 9 челов вкъ, работая такъ же успъшно, какъ и первые?

Въ этой задачь тоже говорится о двухъ величинахъ: о количествъ рабочихъ и о продолжительности работы ихъ. Эти величины зависять одна отъ другой, потому что съ измъненіемъ одной измъняется и другая. Но эта зависимость иная, чемъ въ задаче 1-й. Тамъ отношение двухъ произвольныхъ значеній одной величны было равно отношенію двухъ соотв'єтствующихъ значеній другой величины: здёсь же отношеніе двухь произвольныхь вначеній одной величны равно обратному отношенію соотвътствующихъ значеній другой величины. Возьмемъ, напр., пва такихъ произвольныхъ значенія количества рабочихъ: 6 чел. и 12 чел. Имъ соотвътствують два значенія продолжительности работы, но не произвольныя, а находяшіяся въ соотв'єтствіи со взятыми значеніями количества рабочихъ; при чемъ, очевидно, большему количеству ра-. бочихъ соотвётствуеть меньшее число дней работы, а именно: число дней во столько разъ должно быть меньще, во сколько разъ число рабочихъ больше; такъ, если 6 чел. оканчивають работу въ 18 дней, то 12 чел. окончать работу въ 9 дней.

Значить, отношение 6 чел. къ 12 чел. равно обратному отношению 18 дней къ 9 днямъ, т.-е.

Если двъ величины зависять одна оть другой такъ, что каждому значенію одной изъ нихъ соотвътствуетъ одно опредъленное значеніе другой, при чемъ отношеніе каждыхъ двухъ значеній одной изъ нихъ равно обратному отношенію соотвътствующихъ значеній другой, то такія величины называются обратно пропорціональными.

Такъ, продолжительность работы обратно пропорціональна количеству рабочихъ (при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ, т.-е. при одинаковомъ размірті работы и одинаковой степени успівшности работы каждаго рабочаго).

Весьма простой признанъ обратной пропорціональности двухъ величинъ состоять въ слёдующемъ:

Если съ увеличениет произвольнаго значения одной величины въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза и т. д. соотвътствующее значение другой величины уменьшается тоже въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза и т. д., то такия величины обратно пропорціональны.

Такъ, съ увеличеніемъ количества рабочихь въ 2, къ 3, въ 4 и т. д. разъ, продолжительность работы уменьшается въ 2, въ 3, въ 4 и т. д. разъ; это—величины обратно пропорніональныя.

Подобно этому можно сказать также, что:

нёсь товара, который можно купить на данную сумуу денегь, обратно пропоризоналень пёнё единицы вёса этого товара; -

время, въ теченіе котораго проходится данный путь движущимся равномірно тіломь, обратно пропорціонально скорости движенія;

величина дроби обратно пропорціональна ея анамена-

Замѣчаніе. Для того, чтоби двѣ зависяшія другъ оть друга величины были пропорціональни (прямо или обратио), недостаточно только того обстоятельства, что одна изь этихъ величинь увеличивается, когда и другая увеличивается (для прямой пропорціональности), или что одна величина увеличивается, когда другая умень шается (для обратной пропорціональности). Наир., если какое-инбудь слагаемое увеличится, то и сумма увеличится; но было бы опибочно сказать, что сумма прямо пропорціональнае слагаемому, такъ какъ если увеличить

слагаемое, положимъ, въ 3 раза, то сумма хотя и увеличится, но не въ 3 раза. Подобно этому нельзя, напр., сказать, что разность двухъ чиселъ обратио пропорціональна ьичитаемому, такъ какъ если увеличится вычитаемое, положимъ, въ 2 раза, то разность хотя и умецьпится, по не въ 2 раза. Нужно, чтобы увеличеніе и уменьшеніе об'вихъ селичинъ происходило въ одинановое число разъ.

234. Рѣщеніе способомъ приведенія къ сдиницъ. Уленивъ зависимость между двумя величинами нашей задачи, рѣшичь ее приведеніемъ къ единицѣ, разсуждая слѣдующимь образомъ:

число дней обратно пропорціонально числу рабочихъ; поэтому 1 чел. окончить рабогу въ число дней, большее въ 6 разъ, чтых число дней, въ которое оканчивають рабогу 6 чел.,

а 9 чел. окончать работу въ число дней, меньшее въ 9 разъ, чемъ число дней, въ которое оканчиваетъ работу 1 чел.

 $_{3}$ Но 6 чел. оканчивають работу въ 18 дней; $_{3}$ пачить, 1 чел. окончить работу въ 18 . 6 дней, $_{3}$ 9 чел. окончать работу въ $_{3}$ $_{1}$ $_{2}$ дней.

234,а. Рѣшеніе посредствомъ пропорціи. Число дней работы обратно пропорціонально числу рабочихъ; поэтому 9 чел. окончать работу въ меньшее число дней, чѣмъ 6 чел., и во столько разъ меньшее, во сколько 6 меньше 9; значитъ, искомое число х дней должно удовлетворять пронорци х: 18=6:9; откуда:

$$x=(18\times6):9=12$$
 дней.

235. Простое тройное правило. Въ каждой поъ приведенных задачь рфчь шла только о двухъ величинахъ, примо пропорціональныхъ (какъ ст первой задачь), или обратно пропорціональныхъ (какъ во второй

задачв); при этомъ въ каждой задачв дано было по одному соотвътствующему вначенію объихъ величинь:

1-я вапача. 2-я задача. Колич. сукна. . . 8 арш. Колич. рабочихъ. 6 чел. Стоимость ихъ. . 30 руб. Продолж. работы. 18 дней. а требовалось узнать, какое значение приметь одна изъ величинь, если другая получить новое данное значеніе:

1-я задача.

2-я задача,

Колич. сукна . . . 15 арш. Колич. рабочихъ 8 чел. Какова ихъ стоимость?

Какова продолж. работы?

Въ такихъ задачахъ, слъд., даны 3 числа, а требуется отыскать 4-е число, которое вийсти съ 3 данными числами составляло бы пропорцію.

Способь рашать такія вадачи наз. простымъ тройнымъ правиломъ.

II. Сложное тройное правило.

236. Задача. Для освёщенія 18 комнать въ 48 дней издержано 120 фунт. керосину, при чемъ въ каждой комнатъ горъло по 4 лампы. На сколько дней достанетъ 125 фунт. керосину, если освъщать 20 комнать и въ каждой комнать будеть горьть по 3 лампы?

Расположимъ данныя этой задачи въ две такія строчки (неизвъстное число поставимъ въ послъднемъ столбцъ):

Искомое число дней было бы 48, если бы число комнать было 18, число фунтовъ керосину было 120 и число намиъ въ каждой комнать было 4. Но всь эти числа замънены въ вопросъ задачи новыми, отчего, въроятно, измънится и число дией изъ 48 въ какое-инбудь иное. Чтобы удобиће узнать, какъ именно измѣнится число дней, предположтиъ что сначала только одно число верхней строчки замѣнено новымъ числомъ, а потомъ и другое, и третье. Тикъ, допустимъ, что сначала число комнатъ измѣнено изъ 18 въ 20, потомъ число фунтовъ измѣнено изъ 120 въ 125 и, нак нецъ, число дамиъ измѣнено изъ 4 въ 3.

Когда намъпить число комнать изъ 18 въ 20, а прочія числа оставимъ тъ же самыя, то мы получимъ упрощенную вадачу, которую можно высказать такъ:

для освѣщенія 18 комнать кероспну достаєть на 48 дней; на сколько дней достанеть кероспну для освѣщенія 20 комн. (при одинаковых в прочих условіяхь, т.-е. если кероспну вдсть 120 фунт. и въ каждой комнатѣ будеть горѣть по 4 лампы)?

Эта вадача на простое тройное правило. Ръшимъ ее приведеніемъ къ 1.

Число дней обратно пропорціонально числу комнать; поэтому если при освъщеній 18 комнать керосину достаєть на 48 дней, то при освъщеній только одной комнаты его достансть на 48.18 дней, а при освъщеній 20 комнать число дней окажется $\frac{48.18}{20}$ (что равно $43^{1}/_{5}$ дня, но вычислять эту формулу теперь безполезно).

Замънимъ теперь 120 фунт. керосину 125-ю фунт. Тогда получится такая задача на простое тройное правило:

120 фунт. керосину сторають въ $\frac{48.18}{20}$ дней; во сколько дней сторять 125 фунт. керосину (при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ).

Число дней прямо пропорціонально числу фунтовъ: поэтому 1 фунть керосину сгорить въ $\frac{48.18}{20.120}$ дней, а 125 ф. сгорять вь $\frac{48.18.125}{20.120}$ дней.

Наконецъ, замънимъ 4 ламиы 3-мя ламиами. Тогда получится такая задача на простое тройное правило:

если въ каждой комнатъ горятъ 4 ламиы, то керосину достанетъ на $\frac{48\ 18\ 125}{20.120}$ дией; на сколько дней достанетъ керосину, если въ комнатъ будутъ горътъ по 3 ламиы (при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ)?

Число дней обратно пропорціонально числу ламить; поэтому если будеть горѣть одна лампа, то дней окажется $\frac{48.18.125.4}{20.120}$, а при горѣніи 3-хъ ламить ихъ должно сыть: $x = \frac{48.18.125.4}{20.120.3}$.

Теперь приняты во вичмение вс $\check{\mathbf{x}}$ условія вопроса; остается вычислить полученную формулу: $\mathbf{x} = \mathsf{co}$ дис $\check{\mathbf{u}}$.

287. Сложное тройное правило. Въ задачь, ръшенной въ предыдущемъ параграфъ, говорилось о 4-хъ величнахъ: о количествъ комнатъ, о продолжительностн освъщенія, о количествъ керосину и о количествъ лампъ, при чемъ каждая пара этихъ величивъ находится между собою въ пропорціональной зависимости, примой или обратной (если всъ прочія величны не измъняются); при этомъ дано было по одному соотзътствующему значенію всъхъ величнъ:

18 комн.—120 фунт.—4 лампы—48 дней,

а требовалось найти, какое значеніе приметь одна изъ величинь, если всё прочія получать нёкоторыя повыя данцыя значенія:

20 ком.—125 фупт.—3 лампы—х дчей.

Способъ рѣшать такія задачи, когда данныхъ величинъ болѣе двухъ, наз. сложнымъ тройнымъ правиломъ. Рѣшеніе пхъ, какъ мы видѣли, сводится къ рѣшенію нѣсколькихъ задачь на простое тройное правило.

III. Задачи на проценты.

238. Опредъленіе. «Процентомъ» накого-либо числа называется сотая часть этого числа; слёд., два, три... процента какого-нибудь числа означають двё, три... сотыхь этого числа *).

Такъ, если говорятъ, что въ такомъ-то учебномъ заведеніп число успѣвающихъ учениковъ составляетъ 75 пропентовъ всего числа учащихся, то это значитъ, что первое число составляетъ 75 с о т ы х ъ второго числа (или, что все равно, на каждыхъ сто учениковъ приходится 75 успѣвзющихъ и 25 не успѣвающихъ).

Проценть обозначается знакомъ %; напр., 5% означаеть 5 процентовъ. Такимъ образомъ:

50% означають
$$\frac{50}{100}$$
, т.-е. $\frac{1}{2}$; 25% $\Rightarrow \frac{25}{100}$, т.-е. $\frac{1}{4}$; 75% $\Rightarrow \frac{75}{100}$, г.-е. $\frac{3}{4}$; 10% $\Rightarrow \frac{10}{100}$, т.-е. $\frac{1}{10}$; 5% $\Rightarrow \frac{5}{100}$, т.-е. $\frac{1}{20}$; 4% $\Rightarrow \frac{4}{100}$, г.-е. $\frac{1}{25}$: п. т. п.

Чаще всего слово «проценть» употребляется въ коммерческих вопросахъ, когда рычь идеть о прибыли или убыткъ. Напр., госорять, что торговецъ получиль 20 процентовъ игибыли на затраченный имъ капиталъ. Это надо понимать такъ, что онъ получилъ прибили 20 сотыхъ затраченнаго кап гтала (иначе сказать, 20 рублей на ка-

^{*)} Слово «проценть» проиоходить отъ латинскаго выраженія «pro-centum», что означають «со ста», или «на сто».

ждые затраченные 100 рублей, или 20 коп. на каждыя затраченныя 100 коп.).

238,а. Нѣкоторыя названія, встрѣчающіяся въ задачахъ на проценты. Когда одполицо занимаєть у другого деньги, то при этомь часто ставится условіємь, чтобы должнинь уплачиваль заимодавцу опредѣленные ежегодные проценты. Если, напр., говорять, что нѣкто заняль 500 руб. по 7% (или изъ 7%) годовыхь, то это значить, что должникь обязался, во-1-хъ, уплатить по истеченіи условленнаго срока эти 500 руб., а, во-2-хъ, сверхъ этой суммы уплачивать заимодавцу ежегодно до конца срока по 7 сотыхъ этого капитала, т.-е. по 35 руб. Замѣтимь, что заимодавецъ называется иначе иредиторомъ.

Случается, что лица, имьющія свободныя деньги, отдають ихъ въ банкъ. Въ такомъ случав банкъ уплачиваеть этимъ лицамъ за пользованіе ихъ деньгами опредвленные ежегодные проценты. Въ свою очередь, банкъ выдаеть ссуды за извёстные ежегодные проценты.

Капиталъ, отданный на проценты, называется начальнымъ капиталомъ; число процентовъ (иначе—прибыль, получаемая въ теченіе одного года на 100 рублей, выраженная въ рубляхъ) называется процентною таксою; прибыль на весь капиталъ—процентными деньгами (или просто процентами); начальный капиталъ, сложенный съ процентными деньгами, называется наращеннымъ капиталомъ. Если, папр., 200 рублей отданы въ ростъ *) на 1 годъ по $5^0/_0$, то начальный капиталъ—это 200 руб., прочентная такса—5, процентныя деньги за годъ—10 руб., наращенный капиталъ—210 руб.

239. Простые и сложные проценты. Пропенты бывають простые и сложные. Чтобы понять разницу между тёми и другими, возьмемь примёрь. Положимь,

^{•)} Т.-е. отданы въ банкъ или частному лицу на проценты.

что кто-нибудь отдаль въ банкъ 100 руб. по 5%. Если вто лицо по проществін года не возьметь своихъ 5 руб. процентныхъ денегъ, то его капиталь обратится въ 105 руб. Можеть быть поставлено условіе, чтобы въ теченіе второго года проценты нарастали не только на начальный капиталь, т.-е. на 100 руб., но еще и на тъ 5 руб., которые наросли въ теченіе перваго года; также и въ слъдующіе года. Или же можеть быть условлено, чтобы въ теченіе второго и слъдующихъ годовъ проценты считались только на начальный капиталь, т.-е. на 100 руб., котя бы лицо, положившее капиталь, и не брало ежегодно процентныхъ денегь.

Когда проценты считаются не только на начальный капиталь, но и на проценты съ него, образовавшиеся отъ прошлыхъ лётъ и присоединяемые къ капиталу, то они называются сложными; если же проценты считаются только на начальный капиталь, то они называются простыми.

Во всёхъ задачахъ, поторыя будутъ приведены ниже, предполагаются простые проценты; это всего чаще бываеть въ лебитвительности.

- 240. Замѣчаніе. При рѣшенін задачь на простые процепты надо имѣть въ виду, что:
- 1. Процентныя деньги пропорціональны времени и капиталу, при одинаковых в прочих условіяхъ.

Если, напр., капиталъ 100 руб. и процентиал такса $5^0/_0$, то процентныя деньги за 1 годъ будуть 5 р., за 2 года—10 р., за 3 года—15 р. и т. д., т.-е. онѣ возрастають пропорціонально времени; а если время 1 годъ и такса $5^0/_0$, то процентныя деньги со 100 руб. будуть 5 руб., съ 200 р.—10 руб., съ 300 руб.—15 руб. и т. д., т.-е. онѣ возрастають пропорціонально капиталу.

2. Наращенный капиталь хотя и возрастаеть съ теченіемь времени, но не пропорціоналень времени.

Если, напр., капиталь 100 руб. и процентная такса 5%.

то черезъ 1 годъ наращенный капиталъ будеть 105 руб., а черезъ 2 года 110 руб. (а не 210 руб.), черезъ 3 года 115 руб. (а не 315 руб.), и т. д.

- 241. Различныя группы зацачь на проценты. Задачи на проценты можно разбить на 4 группы соотвётственно тому, что неизвёстно изь слёдующихь 4-хь величинь: а) процентныя деньги (или наращенный капиталь), b) начальный капиталь, с) процентная такса и d) время, вь теченіе котораго капиталь находится вь ростё; при этомь задачи второй группы бывають двоякаго рода: вь одиёхь даются процентныя деньги, вь другихь наращенный капиталь. Какъ рёшаются задачи во всёхь этихь случаяхь, будеть видно изь слёдующихь 5 прииёровь.
- , 242. Задача 1. Найти процептныя деньги съ капитала 7285 р., отданнаго въ рость по $8^0/_0$ на $3^1/_2$ года.

Такъ какъ 8% какого-нибудь числа означають 8 со-

7285 руб. въ годъ приносятъ: 7285
$$\cdot \frac{8}{100} = \frac{7285.8}{100}$$
 руб.,

и такъ какъ процентныя деньги пропорціональны времени, то 7285 руб. въ $\frac{7}{2}$ года приносять:

$$\frac{7285.8.7}{100.2}$$
 = 2039 p. 80 k.

Замъчаніе. Если время содержить місяцы или дии, то надо найти процентный деньги за 1 місяць или за 1 день, а потомь и за данное число місяцевь или дней. При этомь надо иміть въ виду, что въ номмерческихъ вопросахъ, для удобства вычисленій, принято считать годъ въ 360 дней, а місяць—въ 30 дней.

243. Задача 2. Какой капиталь, отданный вь рость по $6^3/4\%$, принесеть вь 6 льть 8 мьсяцевь 3330 руб. пронентных денегь?

Процентныя деньги за 1 годь состаеляють $6^3/_4$ (т.-е. $^{27}/_4$) сотыхь канитала, а за 6 л. 8 м[±]с. (=80 м[±]с.) онь составять $\frac{27.80}{4.12}$ сотыхь канитала, что, по сокращении, равно 45 сотымь канитала. Эти $^{45}/_{100}$ канитала, согласно условію задачи, должны равняться 3330 руб.; значить, здысь дана дробь неизвыстнаго числа (канитала), а требуется найти цылое неизвыстное число; это находится дыленіемь (§ 172,1). Начал. каниталь — 3330 : $\frac{45}{100}$ = 7400 р.

244. Задача 3. Какой капиталь, отданный по $5^0/_0$, обратится черезь 6 лёть въ 455 руб. (если процентныя деньги не берутся въ теченіе этихъ 6 лёть)?

Въ 455 руб. заключаются начальный капиталъ и процентныя деньги съ него за 6 лѣтъ. За 1 годъ процентныя деньги составляють $^{5}/_{100}$ капитала, слѣд., за 6 лѣтъ онѣ составять $^{5}/_{100}$. $6=^{30}/_{100}=^{3}/_{10}$ капитала. Такимъ образомъ, въ 455 руб. заключаются начальный капиталъ и еще $^{8}/_{10}$ его, т.-с. $^{13}/_{10}$ начальнаго капитала; значитъ:

нач. каппталь =
$$455 : \frac{13}{10} = \frac{4550}{13} = 350$$
 (руб.).

245. Задача 4. Поскольку процентовъ (по какой таксъ) надо отдать капиталъ 15108 руб., чтобы въ 2 года 8 иъсяцевъ получить 2417 руб. 28 коп. процентныхъ денегъ?

Чтобы узнать таксу процентовь, достаточно опредълить сколько копескъ въ теченіе года получается со 100 коп. или съ 1 рубля⁵

Такъ какъ 15108 руб. въ 32 мъс. приносять 241728 кои.. то 1 руб. въ 12 мъс. приносять $\frac{241728.12}{15108.32} = 6$ кон.

Если 1 рубль праносить въ годъ 6 коп., то, значитъ, капиталь отданъ по 6%.

Замъчаніе. Если въ задачахъ подобнаго рода вмёсто процентныхъ денегъ данъ наращенный капиталъ, то слъ-

дуеть псь него вычесть начальный капиталь; тогда получимь процентныя деньги.

246. Задача 5. На сколько времени падо отдать 2485 р. по 7%, чтобы получить 139 руб. 16 коп. процентных ленеть?

Такъ какъ въ 1 годъ 2485 руб. приносять (2485 . $^{2}/_{100}$) руб., то неизръстное время равно:

$$139,16:(2485 \cdot \frac{7}{100}) = \frac{13916}{2485.7} = \frac{4}{5}$$
 (года)=288 дней.

247*. Общія формулы. Обозначимъ начальный капиталь а (руб.), процентную таксу p, время t (лѣтъ) и процентныя деньги x (руб.). Такъ какъ процептныя деньги ва годъ составляють $\frac{p}{100}$ капитала, то a руб. въ годъ приносять $a \cdot \frac{p}{100} = \frac{ap}{100}$ руб.; въ t лѣтъ процептныя деньги воврастають въ t разъ; значить:

$$x = \frac{apt}{100} \qquad (1).$$

По этой формуль вычисляются процентныя деньги; нарашенный капиталь получается прибавленіемь процентныхъ денегь къ начальному капиталу.

Если процентныя деньги вычисляются за некоторое число дней (обозначимъ это число n), то въ формуле (1) на месте в

надо подставить дробь $\frac{n}{360}$; гогда получимъ:

$$x = \frac{ap.\frac{n}{360}}{100} = \frac{apn}{36000}$$
 (2).

Формулу эту часто бываеть выгодно представить такъ:

$$x = \frac{an}{36000 : p}$$
 (3),

а именно тогда, когда частное 36000 : р есть целое число, что

будеть, напр., при следующих в часто встречающихся въ практике вначениях p:

p=6...... 36000: p=6000 p=5...... 36000: p=7200 p=4¹/₂.... 36000: p=8000 p=4..... 36000: p=9000 p=3,6.... 36000: p=10000 p=3..... 36000: p=12000 m v. ii.

Числа: 6000, 7200, 8000.... нав. д в личелями, а произведеніе ап—процентнымъ числомъ (или просточисломъ). Формулу (3) мы можемъ, вначитъ, высказатътакъ: чтобы получитъ процентныя деньги съ даннаго капитала ва данное число дней, надо составитъ процентное число, равное произведенію напитала на число дней, и раздълить его на соотвътствующаго дълителя. Такъ, если a=380 руб., n=65 и p=40/0, то

$$x = \frac{380.65}{9000} = \frac{24700}{9000} = \frac{247}{90} = 2 \text{ p. 74 kom.}$$

Вычисленіе процентных денегь при помощи процентных чисель и дівлителей особенно удобно тогда, когда приходится находить сумму многих процентных денегь, получаемых съ разных капиталовь ва разное число дней, но при одной и той же таксі процентовь (это часто бываеть нужно вы банковых операціяхь). Если, напр., извістно, что капиталь a_1 приносиль процентных деньги вь теченіе n_1 дней, капиталь a_2 —вь теченіе n_2 дней, капиталь a_3 —вь теченіе n_3 дней и той же таксі р, выразится весьма простою формулою:

$$x = \frac{a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 + \dots}{36000 : p}$$

IV. Задачи на учетъ векселей.

248. Понятіе о вексель и объ учеть. Когда одно лицо занимаєть у другого деньги подъ проценты, то обыкновенно должникъ выдаєть своему кредитору письменное обязательство въ томъ, что онъ къ извъстному сроку уплатить занятую сумму вмъстъ съ причитающимися на нее процентами. Такое обязательство, написанное на гербовой бумагъ и по установленной формъ, называется векселемъ. Положимъ, напр., что должникъ ванялъ у кредитора 1000 руб. на 1 годъ по 10% и заемъ былъ сдъланъ 1-го января 1915 года. Тогда, разсчатавъ, что черезъ годъ 1000 руб. должны обратиться въ 1100 р., должникъ выдаетъ кредитору, примърпо, такой вексель:

• «Москва (названіе города), 1-го января 1915 года. Вексель на 1100 руб. Оть сего 1-го января 1915 года, черезъ двёнаддать мёсяцевь, по сему моему векседю повиненъ я заплатить (такому-то), или кому онъ прикажеть, тысячу сто рублей, которые я оть него получиль наличными деньгами». (Слёдуеть подпись должника).

Въ векселъ пе пишется ни сумма, занятая въ дъйствительности, ни процентъ, по которому сдъланъ былъ заемъ; но выставляется сумма денегъ, которую надо уплатитъ, и срокъ, въ который должна быть сдълана уплата. Сумма, записанная въ векселъ, пазывается вексельною суммою или валютою векселя. Валюта есть занятый капиталъ вмъстъ съ причитающимися на него процентами за время, на которое былъ свъланъ заемъ.

Кредсторъ, имѣющій вексель, не можеть требовать стъ должника уплаты ранѣе срока, насначеннаго въ векселѣ. Однако, можеть случиться, что самь должникъ пожелаеть уплатить но векселю ранѣе срока. Положимъ, напр., что олжникъ желаеть заплатить за полгода до срока по своему

векселю въ 1100 руб. Ему нъть расчета платить теперь же 1100 руб., потому что онь могь бы пользоваться въ теченіе полугода процентными деньгами сь техъ денегь. которыя онь теперь предлагаеть къ уплатв. Между крелиторомъ и должникомъ въ такихъ случанхъ происходитъ соглашение, по которому кредиторъ долженъ получить нъсколько менъе вексельной суммы. Это соглашение выражается въ форме некотораго числа процентовъ вексельной суммы, которое кредиторь предоставляеть должнику удержать изь нея; условленная такса процентовъ обыкновенно относится къ году. Если, напр., между кредиторомъ и должникомъ произошло соглащение, по которому должникъ, уплачивая по векселю ранве срока, имветъ право удержать 8%, то это значить, что если онь платить за годъ до срока, то можеть удержать въ свою пользу 8/100 вексельной валюты, т.-е. 8 коп. сь каждаго рубля валюты: если же онъ платить за 1/2 года до срока, то можеть изъ каждаго рубля валюты удержать только 4 коп.: платя за 1 мъсяпъ до срока, удерживаеть изъ каждаго рубля только $^{8}/_{12}$ или $^{2}/_{3}$ коп., и т. п.

Сумма, вычитаемая изъ валюты, когда по векселю уплачивается ранте срока, называется учетомъ (или дисконтомъ) векселя; опредълить учеть за данное время по данному проценту вначить учесть (или дисконтировать) вексель.

Учитывать вексель приходится еще и тогда, когда кредиторь продаеть вексель своего должника постороннему инцу (или банку); въ этомъ случав покупатель удерживаеть въ свою пользу ту сумму, которая придется по условленному годовому % за все время, остающееся до вексельнаго срока.

При вычисленіи учета за нъсколько дней или мъсяцевъ годъ принимается въ 360 дней и каждый мъсяцъ—въ 30 дней.

249. Принъры задачъ на учетъ векселей. Такъ какъ учетъ векселя есть ничто иное, какъ процентныя деньги, причитающися съ валюты по условленной годовой таксъ за все время, недостающее до срока векселя, то задачи на учетъ векселей ничъмъ не отличаются отъ соотвътственныхъ задачъ на проценты. Приведемъ нъкоторые примъры.

Задача 1. Вексель въ 5600 руб, уплатили ва 5 мъ сяцевъ до срока съ учетомъ по 6%. Какой сдъланъ быль учетъ по этому векселю и сколько по нему заплатили?

Искомый учеть представляеть собою процентныя деньги, причитающіяся съ 5600 руб. за 5 місяцевь, считая по 6% годовыхь. Поэтому

$$yqerb = \frac{5600.6.5}{100.12} = 140$$
 (py6.).

Слъд., уплатили по векселю 5600—140=5460 руб.

Задача 2. За два мъсяца до срока проданъ вексель съ учетомъ въ 148 рублей. Опредълить валюту векселя, если учеть быль сдвлань по 8%.

Задача эта равносильна такой задачё на проценты: опредёлить начальный капиталь, съ котораго процентныя деньги за 2 и слица, считая по 8% годовыхъ, составляють 148 руб.

Процентныя деньги за 12 мёс. составляють $^8/_{100}$ капитала; за 2 мёсяца онё должны быть въ 6 разъ менёе и потому составляють $^8/_{600}=^1/_{78}$ капитала. Эта $^1/_{78}$ капитала равна 148 руб.; значить, капиталь равень

Задача 8. За з мѣсяца до срока уплатили по векселю 5880 руб. Найти валюту этого векселя, если извѣстно, что учеть быль сдѣлань по 8%.

Эта задача равносильна такой задачь на проценты: какъ великъ начальный капиталъ, если, вычтя отъ него про-

пентныя деньги, причитающіяся сь этого кацитала ва 3 мёсяца, считая по 8% годовыхь, мы получимь 5880 р.? За 3 мёсяца процентныя деньги составляють $\frac{8}{100} \cdot \frac{3}{12} = \frac{2}{100}$ начальнаго капитала; значить, если ихъ вычень изъ него, останется $\frac{98}{100}$ капитала; эти $\frac{98}{100}$ капитала должны равняться 5880 руб.; слёд., искомый капиталь равень

$$5880: \frac{98}{100} = \frac{589000}{98} = 6000$$
 py6.

250*. Математическій учеть. Учеть, описанный въ предыдушехь параграфахь, навывается коммерческимь. Есть еще особаго рода учеть, навываемый математическимь. Чтобы понять разницу между ними, возьмемъ примъръ. Пусть требуется опредёлить учеть по 60/о съ векселя въ 800 руб. уплачиваемаго ва 10 мъс. до срока. Предварительно узнаемъ, сколько процентовъ ва 10 мъсяцевъ составляють $6^{\circ}/_{\circ}$ годовыхъ. Окажется $5^{\circ}/_{\circ}$. Итакъ, за недостающее время придется учесть, удержать 5%. До сего времени им считали, что эти $5^{\circ}/_{\circ}$ означають 5 сотыхь валюты вексеня, т.-е., что съ каждаго рубля валюты удерживается 5 коп. Но можно понимать учеть вь 50/а вначе. Можно думать, что за вексель въ 800 руб. уплачена теперь такая сумма, которая, будучи отдана въ рость по $5^{\circ}/_{0}$, обращается къ концу срока векселя въ 800 руб. Понимаемый въ такомъ смысле учеть называется математическимъ. Съ перваго раза можетъ показаться, что нъть разницы между коммерческимъ и математическимъ учетами. Однако, если ближе всмотримся въ вопросъ, заиётных разницу. Мы предположили, что сумма, уплачиваемая теперь за вексель, должна обратиться въ 800 р., считая по 5%: но каждый рубль, принося $5^{\circ}/_{\circ}$, обращается въ 1 р. 5 коп.; поэтому въ 800 р. должны повторяться столько разъ 1 руб. б коп., сколько разъ въ суммв, уплачиваемой теперь, повторяется 1 рубль. Значить, при новомь нашемь предположения придется учитывать по 5 коп. изъ каждыхъ 105 коп. валюты, а не изъ каждыхъ 100 коп., какъ это дърается при коммерческомъ учетъ. Такъ какъ въ валютъ 105 коп, повторяется меньшее число разъ, чънъ 100 коп., го, вначитъ, математическій учетъ меньше коммерческаго (хотя и очень немного). Дъйствительно, коммерческій учетъ за годъ съ 800 руб. по $5^{\circ}/_{0}$ равенъ 40 руб., а математическій учеть = $5 \times \frac{80000}{105}$ = $3809 \frac{11}{21}$ коп. =38 руб. $9^{11}/_{21}$ коп.

Итакъ, математическій учетъ отличаєтся отъ коммерческаго гібмъ, что проценты, причитающієся ва время, остающеєся до вексельнаго срока, учитываются не наъ рубля валюты, какъ ото діблаєтся при коммерческомъ учетів, а наъ суммы рубля съ процентными деньгами, причитающимися на него ва оставшеєся время (т.-е. съ наращеннаго рубля).

На практикъ производится всегда учеть коммерческій *).

V. Цѣпное правило.

(Правило перевода).

253. Задача. Сколько пудовъ составятъ 100 германскихъ фунтовъ, если извъстно, что 18,36 герм. Фунта равны $9^9/_{50}$ килограмма, а 18,75 килограмма равны $45^3/_{4}$ русскаго фунта?

Для удобства решенія расположних данныя такъ:

Сколько пудовъ въ 100 герм. функахъ, если 18,36 герм. ϕ .= $9^9/_{50}$ килогр.

- > 18,75 килогр.= $45^3/_4$ русск. ф.
- » 40 русск. ф. =1 пуду.

(Первая страчка содержить вопрось задачи, а каждая изъостальных в начинается такими мерами, которыми оканчивается предшествующая; последняя строка должна оканчиваться названиемъ меры, о которой говорится въ вопросе́).

Ръшить задачу можно различными способами. Наиболе удобный спесобъ слъдующій.

^{*) §§ 251} и 252 ("Правило сроковъ") въ настоящемъ нэданій выпущены по ихъ безполезности.

Обращая винманіе на посл'єднюю строчку, а затімь; переходя отъ нея постепенно къ сл'єдующимъ верхнимъ строчкамъ, разсуждаемъ такъ:

Если 40 русск.
$$\phi$$
.=1 пуду,
то 1 русск. ϕ .= $^{1}/_{40}$ пуда,
а $45^{3}/_{4}$ русск. ϕ .= $\frac{1.45^{3}/_{4}}{40}$ пуда.

. На $45^{9}/_{4}$ русск. Ф. составляють 18.75 килограмма; значить:

1 килогр. =
$$\frac{1.45^3/_4}{40.18,75}$$
 пуда, a $9^3/_{50}$ килогр. = $\frac{1.45^3/_4.9^9/_{50}}{40.18,75}$ пудовъ.

Но $9^{0}/_{50}$ килогр. составляють 18,36 герман. фунта; значить:

1 герм.
$$\Phi = \frac{1.45^3/_4.9^9/_{50}}{40.18,75.18,36}$$
 пудовъ, а 100 герм. $\Phi = \frac{1.45^3/_4.9^9/_{50}.100}{40.18,75.18,36}$ пудовъ, 1]
$$= \frac{183.459.100.100.100}{4.50.40.1875.1836} = 3^1/_{50}$$
 пуда.

Разсматривая формулу (1), легко замѣтимъ слѣдующее правило: расположивъ вопросъ и условія задачи гакъ, какъ было указано выше, слѣдуетъ плоизведеніе чиселъ, которыми оканчиваются строчки, раздѣлить на произведеніе чиселъ, которыми онъ начинаются.

Правило рашать подобныя задачи наз. цаннымъ, потому что, располагая данныя, какъ было указано выше, мы получаемъ исъ всёхъ строчекъ подобіе цёни (причемъ строчки уподобляются отдёльнымъ звеньямъ). Правило это лучше называть правиломъ перевода, потому что въ задачахъ на это правило мёры одного государства требуется перевести на мёры другого.

IV. Задачи на пропорціональное пъленіе.

254. Задача 1. Раздёлить 84 на три части пропорпіонально числамь 7, 5 и 2.

Это надо понимать такъ: раздѣ̀лить 84 на такія три части, чтобы первая часть относилась ко второй, какъ 7 къ 5, а вторая къ третьей, какъ 5 къ 2. Назовемъ искомыя части буквами x_1 , x_2 и x_3 . Въ задачѣ требуется, чтобы эти части могли удовлетворить слѣдующимъ двумъ пропорціямъ:

$$x_1: x_2=7:5...(1)$$
 $x_2: x_3=5:2...(2).$

Изь этихь пропорцій можно вывести такое заключеніє: если число x_1 разобьемь на 7 равныхь долей, то такихь долей вь x_2 должно быть 5, потому что только при этомь условіи отношеніе x_1 къ x_2 равно отношенію 7:5; такихь же долей въ x_3 должно быть 2, потому что только при этомь условіи отношеніе x_2 къ x_3 равно отношенію 5:2. Отсюда слѣдуеть, что седьмая доля x_1 въ суммъ $x_1+x_2+x_3$ содержится 7+5+2 раза, т.-е. 14 разъ. Но сумма $x_1+x_2+x_3$ должна составлять 84; значить, седьмая доля x_1 равна 84: 14=6. Такихь долей заключается 7 въ x_1 , 5 въ x_2 и 2 въ x_3 ; сиъд.:

$$x_1 = 6.7 = 42$$
; $x_2 = 6.5 = 30$; $x_3 = 6.2 = 12$.

Правило. Чтобы раздѣлить число на части пропорціоиально нѣсколькимъ даннымъ числамъ, достаточно раздѣлить его на сумму этихъ чиселъ и частное умножить на чаждое изъ этихъ чиселъ.

Замѣчаніе. Изъ пропорцій (1) и (2) можно вывести такую третью пропорцію:

$$x_1 : x_3 = 7 : 2... (3).$$

Дъйствительно, мы видъли, что если x_1 разбить на 7 равныхъ долей, то такихъ долей въ x_3 должно быль 2; поэтому отношение x_1 къ x_3 равно отношению 7 : 2.

, Три написанныя выше пропорціи можно написать со-

$$x_1:x_2:x_3=7:5:2.$$

3255. Задача 2. Раздълить 968 па 4 части пропорціонально числамь:

$$1\frac{1}{2}:\frac{3}{4}:\frac{2}{5}:\frac{3}{8}$$

прежде всего заменимь данный рядь дробныхь чисель рядомь цёлыхъ чисель. Для этого приведемь всё дробн къ общему знаменателю и обратимь смёшанную дробь въ неправильную:

$$1\frac{1}{2}:\frac{3}{4}:\frac{2}{5}:\frac{3}{8}=\frac{60}{40}:\frac{30}{40}:\frac{16}{40}:\frac{15}{40}$$

Если откинемъ общаго знаменателя, то увеличимъ каждую дробь въ одинаковое число разъ (именио въ 40 разъ); отъ этого отношенія между ними не измѣнятся; слѣд.:

$$1\frac{1}{2}: \frac{3}{4}: \frac{2}{5}: \frac{3}{8} = 60: 30: 16: 15.$$

¹ Теперь задачу можно выразить такъ: раздѣлить 968 на 4 части пропорціонально числамъ 60: 30: 16: 15. Ота садача рѣшается такъ, какъ и 1-я.

³256. Задача 3. Раздёлить 125 на такія 4 части, чтобы первая часть относилась ко второй, какъ 2:3, вторая къ третьей, какъ 3:5, а третья къ четвертой, какъ 5:6.

Задача 4. Раздёлить 125 на такія 4 части, чтобы первая часть относилась ко второй, какъ 2:3, вторая къ третьей, какъ 4:5, а третья къ четвертой, какъ 6:11.

Въ каждой изъ этихъ задачь даны отношенія между частями и сумма частей, а отыскиваются самыя части. Однако есть существенная разница между этими задачами. Въ первой задачъ отношенія:

таковы, что послѣдующій членъ перваго отношенія равенъ предыдущему члену второго, а послѣдующій членъ второго отношенія равенъ предыдущему члену третьяго. Вслѣдствіе этого можно сказать, что въ первой задачѣ требуется 125 раздѣлить на 4 части пропорціонально ряду чисель 2: 3: 5: 6. Значить, эта задача ничѣмъ не отличается отъ задачи 1-й.

Во второй задачь отношенія между частями

таковы, что послъдующій члепъ одного отношенія не равень предыдущему члену слъдующаго отношенія.

Однако этотъ случай легко привести къ первому, напр., такъ. Обозначивъ искомыя части буквами x_1 , x_2 , x_3 п x_4 , мы можемъ написать слъдующія три пропорціи:

 $x_1 \cdot x_2 = 2 : 3$ $x_2 : x_3 = 4 : 5$ $x_3 : x_4 = 6 : 11$

Изъ первой пропорців видимъ, что если x_1 разобьемъ на 2 равныя доли, то такихъ долей вт x_2 должно быть 3. Узнаемъ теперь, сколько такихъ же долей должно содержаться въ x_3 и въ x_4 Изъ второй пропорців (которую можно переписать такъ: $x_3...x_2...=5:4$) видимъ, что x_3 составляеть $^5/_4$ x_2 ; но въ x_2 заключается 3 равныя доли; значить, въ x_3 такихъ долей будеть $3 \times ^5/_4$ т.-е. $^{15}/_4$ Изъ третьей пропорців (которую можно написать такъ: $x_4...x_3...=11:6$) видимъ, что x_4 составляеть $^{11}/_6$ x_3 , но въ x_3 заключается равныхъ долей $^{15}/_4$; вначить въ x_4 такихъ удолей будеть $^{15}/_4 \times ^{11}/_6$, т.-е. $^{55}/_8$. Итакъ, въ x_4 содержится $^{65}/_8$ такихъ равныхъ долей, какихъ въ x_3 содержится $^{15}/_4$. въ x_2 сод. 3, а въ x_1 сод. 2. Значить, для ръщенія задачи достаточно число 125 раздълить на 4 части пропорцюнально ряду чисель:

$$2:3:\frac{15}{4}:\frac{55}{8}$$

Уиноживь всё эти числа на 8, им можемь заменить этоть рядь рядомь целыхь чисель:

- Такимъ образомъ задача приводится къ задачъ 1-й.
- Замъчаніе. Если бы члены данныхь отношеній были выражены дробными числами, то полезно эти отношенія предварительно замънить отношеніями цълыхь чисомъ.
- **257*.** Задача **5.** Разд'ящть число a на **3** части обратно пропорціонально числамъ m, n и p.

Это вначить, что число a требуется раздёлять на такія 3 части, чтобы первая часть относилась ко второй, не какь m кь n, a какь n: m, a вторая кь третьей не какь n: p, a какь p: n. Наввавь искомыя части x_1 . x_2 и x_3 , можемь выразить требованія вадачи такими пропорціями:

$$x_1: x_2=n: m$$

 $x_2: x_3=p: n$.

Но отношене n:m можно замёнить равнымь ему отношенимь $\frac{1}{m}:\frac{1}{n};$ точно такъ же p:n можно замёнить $\frac{1}{n}:\frac{1}{p};$ тогда получимь:

$$x_1: x_2 = \frac{1}{m}: \frac{1}{n};$$

 $x_2: x_3 = \frac{1}{n}: \frac{1}{p};$

откуда видно, что части x_1 , x_2 и x_3 должны быть прямо пропорціональны числамь $\frac{1}{m}:\frac{1}{n}:\frac{1}{p}$. Итакь, чтобы разд'єлить число на части обратно пропорціонально данным ь числамь, надо разд'єлить его прямо пропорціонально числамь, обратнымъ даннымъ.

Примъромъ задачь подобнаго родо можеть служить такая:

капиталь въ 10150 руб. раздъленъ на 3 части и кандал часть отдана въ рость: первая часть по $5^{\circ}/_{\circ}$, вторая по $6^{\circ}/_{\circ}$, а третья по $6^{\circ}/_{\circ}$. Какъ вслики эти части, если извъстно, что кандал часть приносить ежегодно одинаковый доходъ?

Такъ какъ проц. депьги за годъ одинаковы для всъхъ частей, то очевидно, что искомыя части обратно пропорціональны процентнымъ таксамъ. Значитъ, 10150 руб. надо раздълить на 3 части обратно пропорціонально числамъ $5:6:6^1/2$ или прямо пропорціонально числамъ $\frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{2}{13}$. Приведя эти дреби къ общему в аменателю и откинувъ послъдній, получимъ цълыя числа 78:65:60, пропорціонально которымъ надо раздълить 10150 руб.

258. Задача 6. Три купца составили товарищество для веденія нікотораго торговаго діла. Первый купець внесь для этой ціли 15000 руб., второй—10000 руб., третій—12500 руб. По окончаніи торговаго діла они получили общей прибыли 7500 руб. Спращивается, сколько изъ этой прибыли придется получить каждому купцу?

Такъ какъ прибыль на каждый внесенный рубль должна получиться одинаковая, то прибыль каждаго участника въ товариществъ пропорідональна капиталу, внесенному имъ. Поэтому задача сводится на такую: раздълить 7500 на три части пропорціонально числамъ 15000, 10000 и 12500; а это есть задача на пропорціональное дъленіе. Чтобы ръшить ее, прежде всего замътимъ, что числа ряда 15000: 10000: 12500 можно раздълить на одно и то же часло (на 2500); отъ этого не измъпятся отношенія между ними. Сокративъ, получимъ 6: 4: 5. Теперь раздълимъ 7500 на три части пропорціонально 6: 4: 5. Разсуждая такъ, какъ было объяснено въ задачъ 1, найдемъ:

$$x_1 = \frac{7500}{15}$$
. $6 = 8000$; $x_2 = \frac{7500}{15}$. $4 = 2000$; $x_3 = \frac{7500}{15}$. $5 = 2500$.

[.] Правило пропорціональнаго діленія назывлется иногда

правиломъ товарищества, потому что помощью этого правила ръшаются, между прочимъ, такія задачи, въ которыхъ, подобно сейчасъ ръшенной, требуется раздълить общую прибыль между нъсколькими лицами, составившими товарищество для общаго коммерческаго предпріятія.

259. Задача 7. На жельзиой дорожь работало 3 артели рабочихь; въ первой артели было 27 рабочихь, во второй 32, въ третьей—15; первая артель работала 20 дней, вторан—18, третья—16; всь три артели получили за работу 4068 руб. Сколько рублей придется получить каждой артели?

Если бы каждая артель работала одинаковое число дней, то плата каждой артели была бы пропорціональна чеслу рабочихъ въ ней; поэтому преобразуемъ условія нашей задачи такимъ образомъ, чтобы число дней работы для каждой артели было одинаково. Напр., предположимъ, что каждая артель работала бы по одному дню; тогда, конечно, уменьшилась бы плата каждой артели; для того, чтобы эта плата не изменилась, надо, чтобы число рабочихъ въ каждой артели увеличилось во столько разъ, во сколько число дней уменьшилось. Такъ, чтобы первой артели получить за 1 день ту же плату, какую она получаеть за 20 дней, надо, чтобы въ этой артели рабочихъ было не 27, а 27×20; также во второй артели должно быть рабочихъ пе 32, а 32×18, чтобы эта артель получила за 1 день такую, же плату, какъ п за 18 дней; въ третьей артели должно быть рабочихь 15×16, чтобы и эта артель получила ту же плату за 1 день, какъ и за 16 дней. Теперь получаемъ такіе два ряда чисель:

• числа рабочихъ (27×20) : (32×18) : (15×16) • дней 1 1 1

Остается разделить 4068 па части пропорціонально числамі рабочихь. Сокративь предварительно эти числа (на 3 и на 4), найдель пто 4068 надо раздълить пропор

ціонально 45 : 48 : 20. Обозначивъ искомыя части буквами x_1 , x_2 и x_3 получимъ, какъ было прежде объяснено:

$$x_1 = \frac{4068.45}{45 + 48 + 20} = \frac{4068.45}{113} = 36.45 = 1620 \text{ (pyo.),}$$
 $x_2 = \frac{4068.48}{113} = 36.48 = 1728 \text{ (pyo.).}$
 $x_3 = \frac{4068.20}{113} = 36.20 = 720 \text{ (pyo.).}$

Вмёсто того, чтобы приводить къ 1 числа дней, мы могли сы привести къ 1 числа рабочихъ; тогда мы должны были бы садаться вопросомъ: если бы вмёсто каждой аргели было только по одному рабочему, то сколько дней долженъ былъ бы работать этотъ рабочій, чтобы получить ту же самую плату? Очевидно, что рабочій, замѣняющій первую артель, долженъ былъ бы работать (20×27) дней, вторую—(18×32) дней, третью—(16×15) дней. Тогда пришлось бы 4068 дѣлить на части пропорціонально только числу дней.

Можеть случиться, что въ задачѣ даны 3 и болѣе ряда чиселъ, пропорціонально которымъ требуется раздѣлить данное число. Если бы, напр., въ предыдущей задачѣ сказано было, что первая артель работала ежедневно столько-то часовъ, вторая столько-то и третья столько-то, то пришлось бы плату дѣлить пропорціонально: во-1) числамъ рабочихъ, во-2) числамъ дней и въ-3) числамъ часовъ. Тогда пужно было бы два ряда чиселъ привести къ 1, напр., предположить, что каждая артель работаетъ 1 лень по 1 часу.

VII. Задачи на смъщеніе и сплавы.

260. Задача 1. Смѣшано три сорта муки: 15 фунт. по 8 коп., 20 фунт. по 7 коп. и 25 фунт. по 4 коп. за фунть. Что стоить фунть смьси?

Узнаемъ сначала, что стоятъ всё фунты 1-го сорта; всё фунты 2-го сорта и всё фунты 3-го сорта; потомъ— что стоитъ вся смісь; затёмъ—сколько фунтовъ во всей смісь, наконецъ—цёну одного фунта смісь:

-15 ф. по 8 коп. стоятъ 8.15=120 коп.

, 20 ф. по 7 коп. > 7.20=140 >

25 ф. по 4 коп. • 4.25=100

Вся смесь стоить . . . 360 3

Всёхъ фунтовъ въ смёси: 15+20+25=60.

- Цена одного фунга смеси: 360 : 60=6 коп.

Подобнымь образомь рёшаются такія задачи, въ которыхь доны цёна и количество каждаго сорта смёшнваемыхь веществь, а отыскивается цёна единицы смёси. Такія задачи называются задачами на смётеніе 1-го рода.

261. Задача 2. Изъ двухъ сортовъ чаю составлено 32 фунта смѣси; фунтъ перваго сорта стоитъ 3 руб., фунтъ второго сорта—2 руб. 40 коп. Сколько фунтовъ взято отъ того и другого сорта, если фунтъ смѣшаниаго чаю стоитъ 2 р. 85 к. (безъ прибыли и убытка)?

Способъ 1-й. Продавая дорогой сорть по 2 р. 85 к., продавень будеть получать убытка на каждомь фунтв 15 кон. (3 р.—2 р. 85 к.); продавая дешевый сорть по 2 р. 85 к., продавень будеть получать прибыли на каждомь фунтв 45 к. (285—240). Если бы убытокь оть фунта дорогого сорта быль расень прибыли оть фунта дешеваго сорта, тогда, члобы убытокь покрылся прибылью, надобыло бы взягь дорогого сорта столько же, сколько и дешеваго. Но въ нашей задачь убытокь оть фунта дорогого сорта мень не прибыли оть фунта дешеваго сорта; изъ этого надо заключить, что, для покрытія убытка прибылью, дорогого сорта должно взять болье, чъмь дешёваго, и во столько разь, во сколько разь 45 больше 15.

Значить, 32 фунта падо раздълить на двъ части пропорціонально 45 : 15 (пли 3 : 1); первая часть покажеть сколько фунтовъ должно взять отъ дорогого сорта, а вторая—сколько фунтовъ должно взять отъ дешеваго сорта. Обозначивъ число фунтовъ дорогого сорта черезъ x_2 , будемъ имъть, по правилу пропорціональнаго дъленія:

$$x_1 = \frac{32}{3+1}$$
 3=83=24; x_2 =8.1=8.

Итакъ, для того, чтобы при смъщении не имъть ни прибыли, ни убытка, количества двухъ смъщиваемыхъ сортовъ должны быть обратно пропорціональны числамъ, поназывающимъ прибыль или убытокъ на единицъ каждаго сорта.

*Способъ 2-й. Предположимъ, что вев 32 фунта взясы оть какого-нибудь одного сорта, напр., оть 1-го. Тогда смёсь будеть стоить дороже, чёмъ требуется, потому что составлена только изъ дорогого сорта. Узнаемъ, на сколько дороже. Одинъ фунть 1-го сорта дороже фунта требуемой смъси на-15 коп. (потому что 3 руб. больше 2 р. 85 коп. на 15 коп.); вначить, 32 фунта 1-го сорта будуть стоить дороже 32 фун. требуемой смъси на 15×32, т.-е. на 480 коп. Чтобы понизить стоимость смѣси, надо нѣсколько фунтовъ дорогого сорга замѣнить столькими же фунтами болье дешеваго сорта. Если одинъ фунть 1-го сорта вам'внимъ фунтомъ 2-го сорта, то стоимость см'вси понизится на 60 коп. (3 р.—2 р. 40 к.—60 к.); вначить, чтобы понизить стоимость смёси на 480 к., надо вамёнить столько фунтовъ 1-го сорта вторымъ сортомъ, сколько разъ 60 к. содержится въ 480 к., т.-е. 8 фунтовъ (480 : 60=8). Если 8 фунтовъ 1-го сорта замѣнимь вторымь сортомъ, то перваго сорта останется 32-8, т.-е. 24 фунта. Игакъ, для составленія смеси надо взять 24 ф. 1-го сорта и 8 ф. 2-го сорта.

Задачи, въ которыхъ дана цѣна единицы каждаго сиѣшиваемаго вещества, цѣна единицы смѣси и количество смѣси, а отыскивается количество смѣшиваемыхъ веществъ, называются вадачами на смѣшеніе 2-1 о рода. Вмѣсто пѣны единицы смѣси можеть быть дана стонимость всей смѣси; но это обстоятельство не можеть измѣсинить пріема рѣшенія, потому что, зная количество смѣси и ей стоимость, легко опредълнить (дѣленіемъ) цѣну одной сдиницы смѣси.

Замётимъ, что задачи на смёшеніе 2-го рода возможны только тогда, когда цёна единицы смёси заключается между цёною единицы 1-го рода и цёною единицы 2-го рода. Напр., было бы невозможно составить смёсь чаю, безъ прибыли и убытка, цёною по 3 руб. 20 к. за фунтъ изъдвухъ сортовъ чаю, цёною по 3 руб. и по 2 руб. 40 коп. за фунтъ.

262*. Неопредъленныя задачи на смъщение. Если въ вадачахъ на смъщение 2-го рода дано для смъщения болье двухъ сортовъ веществъ, то вадача становится неопределенною, т.-е. такая задача допускаеть безчисленное множество ръшеній. Это станеть понятнымъ-изъ спедующаго примера: составить см'есь вина въ 40 ведеръ, пеною по 5 руб. 50 коп. ва ведро, изъ трехъ сортовъ вина: по 6 руб., по 5 руб. и по 4 р. 80 к. за ведро. Цъна одного ведра смъси заключается, какъ видно, между цъною ведра 1-го сорта и паною ведра 2-го сорта; съ другой стороны, опа ваключается между ценою ведра 1-го сорта и ценою ведра 3-го сорта. Поэтому мы можемъ составить требуемую 'смъсь, смѣшивая вино 1-го сорта со вторымъ или вино 1-го сорта съ третьимъ. Допустимъ, что мы какую-нибудь часть 40 ведеръ составили смѣшеніемъ первыхъ двухъ сортовъ, а оставшуюся часть 40 ведеръ составили смъщеніемъ 1-го и 3-го сортовы смышавь обф эти смыси, получимь требуемую смысь. Итакъ воть пріемь для рішенія предложенной задачи: надо разбить 40 ведерь на какія-вибудь двіз части, и одну изъ этихъ частей составить смешением 1-го сорта со 2-мъ, а другую-смешениемъ 1-го сорта съ 3-мъ. Такъ какъ дълить на двъ части 40 ведеръ ны можемъ безчислепнымъ множествомъ способовъ, то очевидно, что предложенная вадача-неопределенная.

263. Задачи на смъщеніе жидкостей. Если говорять; вышо въ 43 градусовъ, 10 это надо пощивът

такъ, что въ каждыхъ 100 объемныхъ частяхъ этого вина содержится 48 частей чистаго спирта, а остальныя 52 части составляеть вода; значить, число градусовъ означаетъ процентное объемное содержание чистаго спирта; иначе сказать, оно означаеть, сколько сотыхъ долей объема сивси приходится на чистый спирть, Задачи на смъщение такихъ жидкостей, которыхъ качество выражается числомъ градусовъ, можно подраздълить тоже на 2 рода, подобно вадачамъ, разсмотръннымъ выше. Приведемъ примъры.

Задача 1. 30 ведеръ вина въ 48 градусовъ смъщано съ 24 ведрами вина въ 36 градусовъ. Сколько градусовъ въ смъси?

-Въ каждомъ ведръ 1-го сорта заключается 48 сотыхъ ведра чистаго спирта. Значить, въ 30 ведрахъ 1-го сорта чистаго спирта содержится 48 × 30, т.-е. 1440 сотыхъ ведра. Въ 24 ведрахъ 2-го сорта чистаго спирта заключается 36 × 24, т.-е. 864 сотыхъ ведра. Во всей смъси чистаго спирта будетъ 1440 + 864, т.-е. 2304 сотыхъ ведра. Такъ какъ всъхъ ведеръ вина въ смъси 30 + 24, т.-е. 54 ведра, то въ каждомъ ведръ смъси чистаго спирта будетъ 2304: 54, т.-е. 42²/з сотыхъ ведра. Значитъ, смъсь окажется въ 42²/з градуса.

Задача 2. Желають составить смёсь изъ вина двухь сортовь: въ 48 град. и въ 86 град. Сколько надо взять того и другого, чтобы составить 10 ведеръ вина въ 45 град.? Такъ какъ ведро 1-го сорта содержить спирта на 3 сотыхъ ведра болёе, а ведро 2-го сорта на 9 сотыхъ менёе, чёмъ требуется, то 1-го сорта должно взять болёе, чёмъ 2-го, во столько разъ, во сколько 9 болёе 3. Значить, 10 ведеръ надо раздёлить на 2 части пропорціонально числамъ 9:3 или 3:1.

1-го сорта надо взять: $\frac{10}{3+1}$. 3=7. $\frac{1}{2}$; 2-го сорта: $\frac{10}{3+1}$. $1=2\frac{1}{2}$.

264: Вадачи на сплавы метапловъ. Золото и серебро, го причинъ своей мягкости, не употребляются

на издівлія въ чистомь видів, но сплавдяются съ какимилибо другими боліве твердими металлами (чаще всего съ міждью). Сплавленные съ волотомъ или серебромь, посторонціе металлы называются лигатурой. Количество чистаго волота или чистаго серебра выражается пробой. У насъ чаще всего принято, что проба означаеть, скольно высовыхъ частей чистаго металла содержится въ 96 высовыхъ частяхъ сплава.

Напр., золото 56-й пробы есть такой сплавь, въ которомъ на 96 въсовыхъ частей приходится 56 частей чистаго золота, а остальныя части—лигатура. Такъ какъ въ фунтъ 96 золотниковъ, а въ золотникъ—96 долей, то можно сказать, что проба означаетъ, сколько золотниковъ чистаго металла содержится въ фунтъ сплава, или сколько долей—въ одномъ золотникъ.

Задачи на сплавы металловь, которыхъ качество выражается пробой, можно подраздёлить на 2 рода, подобно задачамь на смёшеніе, разсмотрённымъ выше. Приведемъ примёры.

Задача 1. 25 фун. серебра 84 пробы сплавлены ст $12^{1/2}$ фун. серебра 72-й пробы. Какой пробы сплавъ?

Въ каждомъ фунтъ 1-го сорта заключается 84 золот. чистаго серебра. Въ 25 фунтахъ того же сорта содержится 84×25 , т.-е. 2100 зол. чистаго серебра. Въ $12^{1}/_{2}$ фунтахъ 2-го сорта чистаго серебра заключается $72 \times 12^{1}/_{2}$, т.-е. 900 зол. Значитъ, во всемъ сплавъ чистаго серебра будетъ 2100+900, т.-е. 3000 зол. Такъ какъ всъхъ фунтовъ въ сплавъ 25+ $12^{1}/_{2}$, т.-е. $37^{1}/_{2}$, то въ каждомъ фунтъ сплава чистаго серебра будетъ 3000 : $37^{1}/_{2}$, т.-е. 80 золотниковъ. Слъд., сплавъ окажется 80-й пробы.

Задача 2. Сколько нужно взять золота 91-й и 87¹/₂ пробы, чтобы составить слитокъ въ 2 фунта 8 золотниковъ 88.9 пробы?

Такъ какъ I золотникъ I-го сорта содержитъ чистаго волота болъе, чъмъ требуется, на 2,1 доли, а 1 золотникъ 2-го сорта содержитъ менъе на 1,4 доли, то 1-го сорта надо взять меньше 2-го въ отношенін 1,4 : 2,1. Значить, 200 волотниковъ надо раздълить на 2 части пропорціонально 1,4 : 2,1, или 14 : 21, или 2 : 3.

приложение.

Приближенныя вычисленія.

- 1. Иногда случается, что, производя какое-либо дъйствіе падь десятичными числами, мы не интересуемся точнымь результатомь этого дъйствія, а желаемь получить только иъсколько первыхь его десятичныхь знаковь; въ такомъ случать вмъсто данныхь чисель можемь брать другія, выраженныя меньшимь числомь цыфрь, и производить дъйствія сокращеннымь способомь. Цъль этой главичказать сокращенные способы сложенія, вычитанія, умноженія и дъленія десятичныхь чисель.
- 2. Опредъленіе. Если, желая получить приближенный результать дъйствія, мы вмысто числа А беремь другое а, то послыднее наз. приближеніе мы числа А сы недостаткомы, если а А, и сы избыткомы, если а А. Число А, по отношенію кы своему приближенію, наз. тогда точнымы числомы.

Погрѣшностью приближенія наз. разность между этимь приближеніемь и точнымь числомь *). Такъ, погрѣшность чисель 52 и 56, разсматриваемыхъ какъ приближенія числа 54, есть 2.

^{*)} Такая погръшность наз. абсолютной въ отличіе отъ отлосятельной погръшности, подъ жоторою разумъють отношение абсолютной погръшности из точному числу.

Часто случается, что точная величина погрѣшности остается неизеѣстной, а извѣстно только, что она меньше дробн $^1/n$; тогда говорять, что это приближеніе точно до $^1/n$. Дробь $^1/n$ наз. тогда верхнимь пред ѣ-ломь погрѣшности. Точное число A заключается тогда между а и $a+^1/n$, если приближеніе а взято съ недостаткомь, и между а и $a-^1/n$, если оно взято съ избыткомь. Если неизеѣстно, взято ли приближеніе а съ недостаткомь, или съ избыткомь, то тогда можемь только утверждать, что A заключено между $a-^1/n$ и $a+^1/n$, \cdot ;

- 3. Когда имѣють дѣло съ десятичными числами, то при ближенія ихъ обыкновенно беруть съ точностью до десятичной единицы какото-либо разряда: до 1/10, до 1/100 т т. д. и даже съ точностью до 1/2 десятичной единицы. Такія приближенія легко находятся по слѣдующимъ правиламъ:
- "1) Чтобы получить приближение съ недостаткомъ дайваго десятичнаго числа (съ конечнымъ или безконечнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ) съ точностью до одной десятичной единицы какого-либо разряда, достаточно отбросить въ числъ всъ цыфры, стоящія вираво отъ той, которая выражаеть единицы этого разряда.

Такъ, приближение съ недостаткомъ числа 3,14159265... съ точностъю до $^{1}/_{100}$ есть 3,14, потому что во-1) послъднее число меньше даннаго, и во-2) погръщность, равная 0,159265... с о т о й, меньше 0,99999... сотой, т.-е. меньше, 1 сотой.

2) Чтобы получить приближение съ избыткомъ даннаго десятичнаго числа съ точностью до одной десятичной единицы какого-либо разряда, достаточно, отбросивъ въ числъ всъ цыфры, стоящія вправо отъ той, которая выражаєть единицы этого разряда, увеличить на 1 послъднюю изъ удержанныхъ цыфръ.

Такъ, приближение съ избиткомъ числа 3,14159265. съ точностью до 0,001 есть 8,142, потому что во-1) по

слъднее число больше даниаго н во-2) погръшность его меньше 0,001.

~3) Чтобы получить приближеніе даннаго десятичнаго числа сь точностью до 1/2 десятичной единицы какоголибо разряда, достаточно, поступивь такь, какь былю выше сказано вь правиль 1-из, увеличить на 1 посивденою изь удержанных цыфръ, если первая изь отброшенных пыфръ есть б или больше 5 ти, я въ противномъ случав оставить ее безъ измѣненія.

Такъ, приближеніе (съ нед.) числа 8,141592... съ точностью до $\frac{1}{2}$ сотой есть 3,14, такъ какъ погрѣщность менѣе 0,5 сотой; приближеніе того же числа (съ изб.) съ точностью до $\frac{1}{2}$ тысячной есть 3,142, такъ какъ ногрѣшность, равная 1-0,592... тысячной, очевидно, меньше 0,5 тысячной.

4. Нѣкоторыя теоремы о погрѣшностяхъ. Замѣтимъ, что если a есть приближеніе числа A, при чемъ погрѣшность равна a, то A=a+a, если приближеніе взято съ недостаткомъ, и A=a-a, если оно взято съ избыткомъ.

Укажемъ нъкоторыя теоремы, которыя намъ понадобятся далъе.

1. Если всь слагаемыя взяты съ недостатномъ или всь съ избытномъ, то погръшность суммы равна суммъ погръшностей слагаемыхъ.

Такъ, если A, B н C суть точныя числа, a a, b и c ихъ приближенія, всё съ недостаткомъ или всё съ избыткомъ, при чемъ соотвётствующія погрёшности будуть a, β и γ , то

$$A=a\pm a$$
, $B=b\pm \beta$, $C=c\pm \gamma$,

гдъ знаки '# находится въ соотвътствін, т.-е. если 'въ 'одномъ случать взять знакъ + (или минусь), то и во всъхъ прочихъ случанхъ долженъ быть взять тотъ же знакъ. Слъд.:

$$A+B+C=(a+b+o)\pm(a+\beta+\gamma)$$
.

Отсюда видно, что суммы A+B+C и a+b+c разнятся между собою на $a+\beta+\gamma$.

Если нѣкоторыя слагаемыя взяты съ недостаткомъ, в другія съ нзбыткомъ, то погрѣшность суммы, очевидно, менѣе суммы погрѣшностей слагаемыхъ. Если, остается неизвѣстнымъ, взяты ли приближенія съ недостаткомъ, или съ избыткомъ, то можемъ только утверждать, что погрѣшность суммы не болѣе суммы погрѣшностей слагае, мыхъ.

11. Если уменьшаемое и вычитаемое взяты оба съ недостаткомъ или оба съ избыткомъ, то погрѣшность разности равна разности погрѣшностей уменьшаемаго и вычитаемаго.

, Такъ, если $A = a \pm a$ н $B = b \pm \beta$, при чемъ знаки \pm находятся въ соотвътствін, то:

$$^{\backprime }A \stackrel{\frown}{-} B \stackrel{\frown}{=} \vec{a} \pm \vec{a} \stackrel{\frown}{-} \vec{b} \mp \vec{\beta} \stackrel{\frown}{=} (\vec{a} - \vec{b}) \pm \vec{a} \mp \vec{\beta}.$$

Отсюда видно, что разности A - B и a - b разнятся между собою на $a - \beta$ или на $\beta - \alpha$ (если $\beta > \alpha$).

Замътимъ, что въ этомъ случат остается неизвъстнымъ, будетъ ли приближенная разность съ недостаткомъ, или съ избыткомъ.

_ Когда одно изъ приближеній взято съ недостаткомъ, а другое—съ избыткомъ, то погрёшность разпости-равна суммъ погрёшностей данныхъ чиселъ; значить, въ случаъ, когда характеръ приближеній неизвъстенъ, можно только утверждать, что погръшность разности не болье суммы погръшностей данныхъ чиселъ.

III. Если одинъ изъ двухъ сомножителей есть число точное, а другой—приближенное, то погръшность произведенія равна произведенію погръшности приближеннаго сомножителя на точнаго сомножителя.

Такъ, если $A = a \pm a$, то $Am = am \pm am$; откуда видно, что Am и am разнятся между собою на am.

Произведение окажется съ недостаткомъ, если приближенный сомножитель взять съ недостаткомъ, и съ избыткомъ въ противномъ случав.

IV. Если дълитель есть число точное, а дълимоеприближенное, то погръшность частнаго равна частному отъ дъленія погръшности дълимаго на дълителя.

Такъ, если
$$A=a\pm \alpha$$
, то $\frac{A}{m}=\frac{\alpha}{m}\pm\frac{\alpha}{m}$; откуда видно, что частныя $\frac{A}{m}$ и $\frac{a}{m}$ разнятся между собою на $\frac{\alpha}{m}$.

Частное окажется съ недостаткомъ, если дѣлимое взято съ недостаткомъ, и съ избыткомъ въ противномъ случаѣ.

Приближенное сложеніе.

5. Правило. Чтобы получить сумму нёсколькихь десятичныхь чисель сь точностью до одной единицы даннаго разряда, достаточно, когда слагаемыхь не болёе 11, въ каждомь изъ нихъ отбросить всё цыфры, слёдующія ва тёмь разрядомь, единицы котораго въ 10 разъ менёе единицы даннаго разряда, сложить полученныя приближенія, отбросить послёднюю цыфру результата и увеличить на 1 предпослёднюю его цыфру.

3,14159.

9,869ø..

3,183... Такъ, поступая по этому правилу въ даиномъ 34,557512

13,011... примъръ, получимъ приближенную сумму 95,54

31,7730 съ точностью до 0,01.

95,534

95,54.

Объясненіе. Отбрасывая десятичные знаки, начиная съ 4-го, мы ділаемъ въ каждомъ слагаемомъ погрівшность, меньшую 0,001, и беремъ приближенія всіє съ недостаткомъ. Въ такомъ случай погрівшность приближенной

суммы 95,534, равная суммѣ погрѣшностей слагаемыхъ будеть менѣе 11-ти тысячныхъ, если слагаемыхъ не бояѣе 11-ти. Отброснев въ результатѣ послѣднюю цыфру, мы еще уменьшаемъ сумму, но не болѣе, какъ на 9 тысячныхъ; вначитъ, наибольшая погрѣшность числа 95,53 менѣе 11+9 тысячныхъ, т.е. менѣе 20 тыс. ияй 2 сотыхъ. Увеличивъ пыфру сотыхъ на 1, мы увеличиваемъ сумму на 1 сотую; вначитъ, на столько же уменьшаемъ погрѣшность, вслѣдствіе чего погрѣшность числа 95,54 менѣе 2—1 сотой, т.-е. менѣе 1 сотой.

Когда слагаемых болье 11, но менье 102, то въ каждомъ изъ нихъ должно отбросить всъ десятичные знаки, слъдующе за тъмъ разрядомъ, единицы котораго въ 100 разъ меньше единицы даннаго разряда.

Приближенное вычитаніе.

- 6. Правило. Чтобы получить разность двухъ десятичныхъ чиселъ съ точностью до одной единицы даннаго разряда, достаточно отбросить въ данныхъ числахъ всъ имфры, слъдующія за единицами этого разряда, и найти разность полученныхъ приближеній.
- 5,084 . . . Напр., поступая по этому правилу въ данномъ примъръ, получимъ приближенную разность 2,311 съ точностью до 0,001.
- Объясненіе. Отбрасывая всё десятичные знаки, начиная съ 4-го, мы дёлаемъ въ каждомъ числё погрёшность, меньшую 0,001, и беремъ приближенія оба съ недостаткомъ. Въ такомъ случаё погрёшность разности, равная разности погрёшностей уменьшаемаго и вычитаемаго, очевидно, меньше 0,001.
- 7. Правила приближеннаго сложенія и вычитанія повволяють рёшить слёдующій важный въ практическом отношеніи вопрось: найти сумму или разность данных приближенных деслітичных чисель съ возможно боль-

шею точностью и определить верхній предель погращности.

Пусть, напр., даны числа: 7,358..., 0,0274... и 3,56..., изъ которыхъ первое точно до $^{1}/_{1000}$, второе до $^{1}/_{10000}$ и третье до $^{1}/_{1000}$ при чемъ предполагается, что ми не имъемъ возможности найти цъфры, сявдующія за тъли, которыя даны (эти числа, напр., получены изъ опытныхъ изслъдованій). Требуется найти сумму этихъ чиселъ съ найбольшею точностью. Примъняя правило сокращеннаго сложенія, мы легко замътимъ, что сумма можетъ быть найдена только съ точностью до $^{1}/_{10}$ и потому, производя сложеніе, безполезно брать въ данныхъ числахъ (первомъ и второмъ) цыфры, стоящія направо отъ цыфры сотыхъ.

Пусть еще требуется найти съ возможно большею точностью разность чиселъ: 3,1415... и 2,034..., изъ которыхъ первое точно до $^{1}/_{10000}$, а второе—до $^{1}/_{1000}$, и оба числа взяты съ недостаткомъ. Примѣняя правило приближеннаго вычитанія, замѣтимъ, что разность можетъ быть найдена только до $^{1}/_{1000}$ (и потому въ первомъ числѣ безполезно брать цыфру 5).

Приближенное умножение.

8. Правило. Чтобы получить произведеніе двухъ десятичныхъ чисель съ точностью до одной единицы даннаго разряда, подписывають подъ множимымъ цыфры
множителя въ обратномъ порядкъ (справа налъво) такъ,
чтобы цыфра его простыхъ единицъ стояла подъ тою цыфрою множимаго, которая выражаетъ единицы, въ 100 разъ
меньшія единицы даннаго разряда. Затъмъ умножногъ
множимое на каждую значащую цыфру множителя, не
обращая при этомъ вниманія на цифры множимаго, стоящія вправо отъ той цыфры мпожителя, на которую умножаютъ. Всъ эти частныя произведенія подпясывають
одно нодъ другимъ такъ, чтобы первыя справа ихъ цыфры

стояли въ одномъ вертикальномъ столбив, послв чего ихъ складываютъ. Въ суммв отбрасываютъ двв цыфры справа и увеличивають на 1 послвдиюю изъ оставшихся ныфръ. Наконецъ, въ получившемся такимъ образомъ числв ставятъ запятую такъ, чтобы послвдняя его справа цыфра выражала единицы даннаго разряда.

Правило это требуеть измёненія въ случаяхь, о которыхь будеть сказано ниже.

Примѣръ. Найти съ точностью до 0,001 произведение: 314,159265358...×74,632543926...

62934 523647			
2199 114855	погрѣшпость < 7		стотыс
125 663704	>	<4	>
18 849552	>	<6	>
942477	>	<3	>
62830	>	<2	>
15705	>	< 5	>
1256	>	<4	>
93	>	<3	>
27	>	<9	>
23446,50499			
23446,505			

314,159265358...

Поступая по данному правилу, найдемъ приближенное произведение 23446,505, точное до 0,001 (съ недостаткомъ или съ избыткомъ).

Объясненіе. Во-1-хъ, объяснить, что всё частным произведенія выражають единицы одного и того же разряда, именно во 100 разъ меньшія единицы даннаго разряда (въ нашемъ примъръ—стотысячныя доли). Дъйствительно, умножая на первую цыфру 7 число 314159265, мы умножаемъ милліонныя доли на десятки; значить, получаемъ въ произведеніи стотысячныя доли. Да-

лье, умножая на 4 число 31415926, мы умножаемь стотысячныя доли на простыя единицы; значить, получаемь снова въ произведени стоты сячиыя доли, ит. д.

Изъ этого слъдуеть, что сумма 2344650499 выражаеть стотысячныя доли, т.-е. она есть число 23446,50499.

- Во-2-хъ, объяснимъ, что погрѣшность въ окончательномъ результатъ менъе 0,001.

Дъйствительно, такъ какъ часть множимаго. написанная направо отъ пыфры 7 множителя, меньше 1 милліонной, то, пренебрегая произведениемъ этой части на 70, мы уменьшаемъ результать на число, меньшее 7 стотысячныхъ. Далье, такъ какъ часть множимаго, написаниая направо оть пыфры 4 множителя, меньше 1 стотысячной, то, пренебрегая произведениемъ этой части на 4 простыя единицы, мы уменьшаемъ результать на число, меньшее 4 стотысячныхъ. Разсуждая подобнымъ образомъ относительно всъхъ прочихъ пыфръ мпожителя, на которыя приходится умножать, замътимъ, что мы уменьшаемъ результать на число, меньшее 7+4+6+3+2+5+4+3+9 стотысячныхъ. Наконець, такъ какъ множимое меньше 1 тысячи, а часть мпожителя, написаниая влево отъ множимаго (на которую, сл 8 д.. не приходится умножать вовсе), меньше 2+1 стомилліонныхъ, то, пренебрегая произведеніемъ множимаго на эту часть множителя, мы еще уменьшаемъ результать на число, меньшее 2+1 стотысячныхь. Слёдовательно, беря выбото точнаго произведенія число 23446,50499, мы уменьшаемъ первое на число, меньшее (7+4+6+3+2+5++4+3+9)+2+1 стотысячныхъ, т.-е. вообще меньшее 101 стотысячной, если только сумма цыфръ множителя, на которыя приходится умножать, увеличенная на первую изъ отбрасываемыхъ его цыфръ, не превосходить 100 (что въ большинствъ случаевъ и бываеть. *) Кромъ того, отбра-

^{*)} Это всегда имъстъ мъсто, если число частныхъ произведеній не превосходитъ 10.

сывая двф последнія цыфры результата, мы снова уменьщаемъ произведеніе на число, не превосходящее 99 стотысячныхъ. Поэтому все уменьшеніе будеть менте 101+99 стотысячныхъ, т.е. менте 2 тысячныхъ; если же последнюю пыфру увеличимъ на 1, т.-е. на 1 тысячную, то результатъ 23446,505 развится отъ точнаго произведенія менте, чтыть на 2—1 тысячной, т.-е. менте 1-й тысячной (при чемъ остается неизвестнымъ, будетъ им онъ съ избыткомъ или съ недостаткомъ),

Изь этого объясненія слідуеть, что данное правило (извістное подь названіемь правила Утрехта *) можеть сыть приміняемо безь всякаго изміненія только тогда, когда сумма цыфрь множителя, на которыя приходится умножать, увеличенная на церрую изь его отбрасываемыхъ цыфрь, не превыпаеть 100. Когда эта сумма заключается между 100 и 1001, то въ правилі надо сділать два изміненія; 1) пыфру простыхъ единиць подписать нодь тою пыфрою множимого, которая выражаеть единицы, въ 1000 разь меньшія единицы даннаго разряда, и 2) въ результать, вмісто двухь, отбросить три посліднія справа цыфры.

Когда же эта сумма не превышаеть 10, то достаточно написать цыфру простыхъ единицъ множитсяя подъ тою цыфрою множимаго, которая выражаеть единицы, въ 10 разъ мецьдія единицы даннаго разряда, и въ результатѣ отбросить одну цыфру справа.

Замѣчаніе. Увеличивать на 1 послѣднюю изъ удержанныхъ цыфръ произведенія не всегда необходимо. Это нужно было сдѣлать въ раземотрѣпномъ примѣрѣ, потому что тамъ погрѣшность произведенія (до увеличенія на 1 послѣдней цыфры его) мепѣв суммы

(7+4+6+3+2+5+4+3+9)+2+1+99 ctotic.

которая заключается между 100 и 200 стотысячныхъ. Но

^{*)} Утрежив англійскій математикъ (1574—1860).

если бы отбрасываемыя 2 цыфры были не 99, а, напримъръ, 25, то погръшпость произведенія оказалась бы меньше суммы

$$(7+4+6+3+2+5+4+3+9)+2+1+25$$
 ctothc.,

- т.-е. меньше 71 стотыс., что, въ свою очередъ меньше 100 стотыс., т.-е. меньше 1 тысячной. Значить, тогда не нужно было бы уреличивать послъднюю цыфру на 1. Въ этомъ случав произведение было бы съ недостаткомъ.
- 9. Въ примънени правила Утрехта мы не обращаемъ никакого вниманія на тъ цыфры множимаго, которыя стоятъ вправо отъ множителя, и на тъ цыфры множителя, которыя стоятъ влъво отъ мпожимаго; и тъ, и другія мы можемъ совствъ отбросить. Такимъ образомъ, во множимомъ и во множителъ нужныхъ цыфръ должно быть одно и то же число; не трудно заранте опредълить, с и оль и о и м ф ръ должно быть, что бы произведение было съ заданною точностью. Разънсиимъ это на примъръ.

Пусть требуется вычислить до $^{1}/_{100}$ произведеніе $1000 \pi (\sqrt{5}-1)$,

гдѣ π есть отношеніе окружности къ діаметру, равное 3,1415926535... Обращая вниманіе на послѣднее умноженіе, разсуждаемъ такъ: искомое произведеніе должно быть вниислено до 1 сотой; значить, цыфра нростыхъ единицъ множителя (т.-е. V 5—1) должна стоять подъ 4-мъ десятичнымъ внакомъ множимаго; съ другой стороны, во множителѣ (V 5—1) нѣтъ разрядовъ выше простыхъ единицъ; изъ этого заключаемъ, что больше 4-хъ десят. знаковъ во множимомъ, т.-е. въ 1000 π , безполезно вычислять. Значитъ, 1000 π надо взятъ равнымъ 3141,5926; слѣд., и во множителѣ, т.-е. въ V 5—1, надо вычислить 8 цыфръ. Извлечениемъ находимъ, что V 5=2,2360679 н, слѣд., V 5—1=1,2360679.

"Дъйствіе выполняется такъ:

$$1000\pi = 3141,592 6$$

$$9760 632,1 = \sqrt{5}-1$$

$$.3141 592 6$$

$$628 318 4$$

$$94 247 7$$

$$18 849 0$$

$$188 4$$

$$21 7$$

$$2 7$$

$$3883 220 5$$

$$3883,22$$

Пусть еще требуется вычислить π^3 съ точностью до 0,01. Такъ какъ $\pi^3 = \pi^2 \pi$, и въ цълой части числа π только одна цыфра, то π^2 должно вычислить до 4-го десят. знака. Такъ какъ $\pi^2 = \pi$. π , то, для нахожденія этого произведенія до 4-го десят. знака, надо взять число π съ 6-ю десят. знаками. Цъйствіе расположится такъ:

$\pi = 3,141592$	9,8696
2 951413	5 1413
9 424776	29 6088
314159	9869
125660	3944
3141	98
1570	45
279	31 0044
6	$31,01 = \pi^8 (30^{-1}/_{100})$
9 869591	
$\pi^2 = 9,8696$.	

10. Въ предыдущемъ примъръ во множимомъ и во множителъ мы могли взять (вычисливъ ихъ) столько цыфръ, сколько пожелаемъ. Но такъ не всегда бываетъ. Пусть, напр., даны два числа: 25,34627... и 8,3794..., изъ кото-

рыхъ первое точно до 1 стотысячной, а второе—до 1 десятитысячной, при чемъ цыфры, которыя должны были бы слёдовать за данными, намъ неизвёстны (числа эти получены изъ опытныхъ изм'треній); требуется вычислить произведеніе этихъ чиселъ съ возможно большею точностью.

Напишемъ сначала то число, у котораго всёхъ цыфръ менёе, т.-е. 8,3794, а подъ нимъ подпишемъ въ обратномъ порядке цыфры другого числа такъ, чтобы цыфра высшаго его разряда приходилась подъ последнею цыфрою множимаго:

8,37 94 726 43.52

Теперь видимъ, что цыфра простыхъ единицъ множителя приходится подъ тысячными долями множимаго; слёд., по правилу Утрехта, произведение получится съ точностью до одной единицы, большей тысячной доли во 100 разъ, т.-е. до ¹/₁₀ (оно будеть 212,3 съ недостаткомъ).

Приближенное дъленіе.

11. ЛОММА. Если дълителя, большаго единицы, вамънимъ его цълою частью, то увеличимъ частное на число, меньшее этого частнаго, дъленнаго на цълую часть дълителя.

Для доказательства положимъ, что дѣлимое есть M, дѣлитель A и дробная часть дѣлителя a. Тогда цѣлая часть дѣлителя есть A—a и

точное частное
$$=\frac{M}{A}$$
, прибл. частное $=\frac{M}{A-a}$; увеличение частнаго $=\frac{M}{A-a}-\frac{M}{A}=\frac{MA-MA+Ma}{(A-a)A}=\frac{Ma}{(A-a)A}=\frac{Ma}{A}$: $(A-a)$, Такъ какъ $a<1$, то $Ma; поэтому$

увеличение частнаго $<\frac{M}{A}$: (A-a),

т.-е. меньше точного частного, деленного на целую часть делителя.

Напр., замънивъ дълителя 367,28 его цълово частью 367, мы сдълаемъ ошибку, меньшую $1/_{367}$ точнаго частнаго.

12. Правино. Чтобы найти частное двухь десятичныхь чисель съ точностью до одной единицы даннаго разряда, находять прежде всего высшій разрядь частнаго и затымь число его цыфрь n. Далые отдыляють вы дылитель слыва наименьшее число цыфрь, какое потребно для того, чтобы выражаемое ими число было не меньше числа n, сопровождаемаго n нулями. Остальныя цыфры дылителя отбрасывають. Вы дылимомы отдыляють слыва столько цыфры, чтобы выражаемое ими число содержало вы себы полученнаго дылителя менье 10 разь. Остальныя пыфры дылимаго отбрасывають.

Раздёливь это дёлимое на дёлителя, находять первую цыфру частнаго и затёмь первый остатокь.

Послѣ этого дълять первый остатокъ на дълптеля, зачеркнувъ въ послъднемъ одну пифру справа; отъ этого получають вторую пыфру частнаго и затъмъ второй остатокъ.

Второй остатокъ дёлять на дёлителя, вачеркиувъ въ немъ еще одну цыфру справа; отъ этого находять третью цыфру частнаго и третій остатокъ.

Продолжають такъ дъйствіе до тъхъ поръ (зачеркивал въ дълителъ при каждомъ частномъ дъленіи одну цыфру справа), пока не получать встхъ n цыфръ частнаго.

Наконецъ, въ полученномъ частномъ ставятъ запятую такъ, чтобы послъдняя справа цыфра выражала единицы даннаго разряда.

Пусть, напр., требуется найти съ точностью до 0,01 частное:

31415,92653589....:432,6394825..

Такъ какъ дёлимое больше дёлителя, умноженнаго на 10, но меньше дёлителя, умноженнаго на 100, то высшій разрядь частнаго—десятки. Съ другой стороны, послёдняя цыфра въ частномъ должна выражать сотыя доли, согласно требованію; изъ этого заключаемь, что число цыфрь въ частномъ должно быть 4.

Первыя слѣва цыфры дѣлителя, выражлющія число, не меньшее 40000, будуть 43263. Остальныя цыфры дѣлителя отбрасываемъ. Дѣлимое, согласно правилу, будеть 314159. Остальныя цыфры дѣлимого отбрасываемъ. Тогда дѣйствіе выполнится такъ:

314159	43.263	пли еще	314159	43263
302841	72,61	короче	11318	72,61
11318.		(§ 7ā):	2666	
8652			74	
2666			31	
2592				
74				
43				
31				

Объясненіе. Прежде всего приведемъ вопросъ къ отысканію частнаго съ точностью до цѣлой единицы, при чемъ дѣлитель былъ бы число, не меньшее 40000. Для этого достаточно:

- 1) увеличить дъличое во сто разъ, отчего увеличится во столько же разъ частное, а, слъдов., и погръшность его;
- . 2) перенести въ дѣлимомъ и дѣлителѣ заплтую вправо на одно и то же число цыфръ (отчего частное ис измѣпится), именно на столько, чтобы дѣлитель сдѣлался не меньшимъ 40000.

Тогда вопросъ приводится къ нахождению частнаго:

314159265,3...: 43263,9...

съ точностью до цёлой сдиницы.

Замѣнимъ теперь дѣлителя цѣлою его частью; отъ этого, по доказанному, мы увеличимъ частное на число; меньшее этого частнаго, дѣленнаго на цѣлую часть дѣлителя. Но частное, содержа въ цѣлой части 4 цыфры, менѣе 10⁴, а цѣлая часть дѣлителя не меньше 40000; вслѣдствіе этого мы увеличимъ частное на число, меньшее 10⁴: 40000, т.-е меньшее 1/4. Запомпивъ это, будемъ находить частное:

314159265,3...: 43263

Чтобы найти число единиць высшаго разряда частнаго, т.-е. тысячи, достаточно раздѣлить число тысячь дѣлимаго на дѣлителя. Это мы и сдѣлали, получивъ въ част номъ цыфру 7. Остатокъ отъ точнаго дѣлимаго будетъ 11318265,3... Этотъ остатокъ должно раздѣлить на 43263, чтобы пополнить прпближенное частное, опредѣляемое теперь съ точностью до 1/4. Раздѣливъ оба эти числа на 10, приводимъ вопросъ къ дѣленю 1131826,53... на 4326,3.

Это частное имѣетъ въ цѣлой части только 3 цыфры; вначитъ, оно меньше 10^3 . Замѣнивъ дѣлителя цѣлою его частью, которая болѣе 4000, мы увеличимъ частное на число, меньшее 10^3 : 4000, т.-е. меньшее 1/4. Запомнивъ это, будемъ находить частное 1131826,53...: 4326.

Чтобы найти первую цыфру этого частнаго, т.-е. сотпи, достаточно число сотенъ дълимаго раздълить на дълители. Это мы и сдълали, получивъ въ частномъ цыфру 2.

Продолжая эти разсужденія далье, увидимь, что при полученій каждой цыфры частнаго мы его увеличиваемь на число, меньшее ¹/₄. Такъ какъ всьхъ цыфръ въ частномь 4, то въ результать мы увеличиваемь частное на число, меньшее 1.

Съ другой стороны, не дѣля остатка 31... на послѣдняго дѣлителя 43, мы уменьшаемъ частное на число, меньшее 1. Значить, мы увеличили его на число, меньшее 1, и уменьшили на число, меньшее 1; слѣд., полученный результать, во всякомъ случаѣ, точенъ до 1.

Перенсся тенерь занятую въ дѣлимомъ на прежисе мѣсто, т.-е. раздѣливъ его на сто, мы будемъ имѣть частное 72,61, съ точностью до $^{1}/_{100}$.

Замѣчаніе. Приведенное правило и его объясненіе не требують никакого измѣненія въ томъ частномъ случав, когда какое-нибудь дѣлимое содержить соотвѣтствующаго дѣлителя 10 разъ. Тогда ставимъ въ частномъ число 10 (въ скобкахъ). Продолжая дѣленіе, увидимъ, что всѣ слѣдующія цыфры частнаго должны быть нули. Пусть, напр., требуется найти частное 485172,923...: 78,254342... съ точностью до 1. Примѣняя правило, найдемъ:

485172 78254 469524 61(10,0 15648 6200 7825 7823	Третье дёлимое (7823) содержить соотвётствующаго дёлителя (782) десять разъ; пишемь въ частномъ число 10. Слёдующая цыфра въ частномъ оказалась 0. Искомое ча-
7820	стное есть число 61(10)0, те. 6200.
3.	

Вь этомъ случай приближенное частное больше точнаго частнаго. Дийствительно, цыфры частнаго, найденныя раньше, чимъ представился этотъ случай, не могутъ быть меньше, чимъ бы слидовало, такъ какъ мы при каждомъ частномъ дилени брали дилителей, которые меньше точнаго дилителя. Значитъ, первыя дви цыфры точнаго частнаго должны выражать число, не большее 61, поэтому оно меньше числа 6200.

13. Пусть даны два числа: 56,42375... и 6,237.., изъ которыхъ первое точно до 1 стотысячной, а второе—до 1 тысячной, при чемъ предполагается, что цыфры, слъдующія за данными, намъ неизвъстны; требуется найти частное отъ дъленія перваго на второе съ возможно большею точностью. Предположимъ, что примъняя правило сокращеннаго дъленія, мы могли бы въ

частномъ найти 4 ныфры. Тогда дёлитель должеть быть больше 40000. Но въ нашемъ дёлителё не дано достаточнаго числа цыфръ, чтобы можно быто образогать (по правилу дёленія) число, большее 40000. Значить, 4-хъ цыфръ въ частномъ получить мы не можемъ. Посмотримъ, можемъ ли получить 3 цыфры. Тогда дёлитель долженъ быть болёе 3000. Изъ нашего дёлителя мы можемъ образовать число, большее 3000; это будетъ 6237. Съ другой стороны, и изъ нашего дёлимаго мы можемъ образовать число, большее 6237. Значитъ, мы можемъ найти въ частномъ 3 цыфры, но не болёе. Такъ какъ высшій разрядъ частнаго, очевидно, простыя единицы, и всёхъ цыфръ въ немъ 3, то оно будетъ точно до 1/100

Если бы дёлимое было только 56,42, а дЪлитель прежній— 6,237, то тогда мы не могли бы получить въ частномъ и 3-хъ цыфръ, потому что въ дёлимомъ не дано достаточнаго числа цыфръ, чтобы изъ нихъ образовать число, большее 6237. Въ этомъ случаё мы могли бы найти только 2 цыфры частнаго. Дъйствительно, тогда дёлитель долженъ быть больс 200, т.-е. 623, а дёлимое болье 623, что возможно.

 Примъромъ примъненія предыдущихъ правилъ можетъ служить слъдующая задача.

Вадача. Вычислить съ точностью до одной сотой выражение:

$$x = \frac{\sqrt{348} - \sqrt{127}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{12}}$$

Это выраженіе есть частное; поэтому прежде всего опредёнимь, сколько должно быть цыфрь вь этомь частномь, а для этого надо знать высшій разрядь его. Начавь извлеченіе $\sqrt{848}$ и $\sqrt{127}$, мы увидимь, что первыи корень въ цёлой своей части содержить 18, а второй 11; слёд., числитель равень приблизительно 7; внаменатель равень приблизительно 2. Значить, высшій разрядь въ частномь—простыя единицы. Такъ какъ

частное требуется вычислить до сотыкь долей, то нь немь должно быть 3 цыфры. Поэтому знаменатель мы должны вычислить настолько точно, чтобы изъ него можно было (по правчлу сомра щеннаго деленія) образовать число, большее 3000, для чего достаточно вычислить 5 его цыфрь, а для этого необходимо (по правилу сокращеннаго сложенія) нашти отдельные корни знаменателя съ 6-ю цыфрами. Произведя извлеченіе, найдемъ:

$$V\overline{2}$$
=1,41421; $V\overline{3}$ =1,73205; $V\overline{5}$ =2,23606; $V\overline{12}$ =3,46410 гм затъмъ: $V\overline{2} + V\overline{3} + V\overline{5} - V\overline{12}$ =1,9183 (до $^{1}/_{10000}$).

Теперь надо вычислить числителя съ такою точностью, чтобы изъ первыхъ его цыфръ можно было образовать число, большее 19183. Такъ какъ числитель равенъ приблизительно 7, то сверхъ цълаго числа въ немъ потребуется вычислить еще 4 десятичные знака, а такъ какъ числитель есть разность, то уменьшаемое и вычитаемое надо вычислить также до 4-го десятичнаго знака Извлечениемъ находимъ:

$$\sqrt{348} = 18,6547$$
 $\sqrt{127} = 11,2694$ $\sqrt{348} - \sqrt{127} = 7,3853$

Остается разділить по правилу сокращеннаго дівленія 73853 на 19183, послів чего получить:

$$x=3.85$$
 (go $^{1}/_{100}$).

Задачи:

- 1. Вычислить до $^{1}/_{100}$ выраженіе у= $a\,\iota^{2}+bx$, сели a=2,71856..., b=1,605043... и x=0,04271...
- 2 При тъхъ же ваданіяхъ вычислить съ напбольшею точностью выражение:

$$y = \frac{ax+1}{b+x}.$$

- 3. Вычиснить до $^{1}/_{10000}$ выраженіе $^{1}/_{7}$.
- 4. Вытислить $\frac{\pi}{64800}$ съ 13 десятичными знаками.

5. Вычислить до ¹/₁₀₀ произведеніе

 $\pi.37,54832709.637,8324926.$

- 6. Прямоугольникъ имѣетъ нямѣреніями: b=38,32... и h=5,687... Вычислить его площадь съ возможно большею точностью и указать предѣлъ погрѣшности.
- 7. Вычислить съ точностью до 1 миллиметра окружность, описанную около квадрата, котораго сторона равна 1 метру.
 - 8. Вычислить до 0,001 выражение:

$$2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.}$$

- 9. Вычислить съ 6-ю десятичными внаками сторону квадрата, равновеликаго кругу, котораго радіусь равенъ 1.
 - 10. Вычислить до 0,001 выраженіе $\sqrt{2,5-\sqrt{1,25}}$,

У к а з а н і є. По правиламъ алгебры, чтобы найти приближенное значеніе квадр. корня съ точностью до 1/n, надо умножить подкоренное число на n^2 , изъ полученнаго произведенія извлечь корень съ точностью до 1 и результать раздѣлить на n. Слѣд., вопросъ приводится къ вычисленію выраженія:

$$\sqrt{2500000-10000001/1,25}$$

ев точностью до 1. Для этого достаточно извисчь корень съ точностью до 1 изъ ц ѣ л о й ч а с т и подкоренного числа. Итакъ, разность $2500000-1000000\sqrt{1,25}$ надо вычислить до 1; значить, вычитаемое надо вычислить тоже до 1; поэтому $\sqrt{1,25}$ придется находить до 1 милліонної.

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ,

не превосходящихъ 6000.

-								
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29	179 181 191 193 197 199 211 213 227 229	419 421 431 433 439 443 449 457 461 463	661 673 677 683 691 701 709 719 727 733	947 953 967 971 977 983 991 997 1009	1229 1231 1237 1249 1259 1277 1279 1283 1289 1291	1528 1531 1543 1549 1553 1569 1567 1571 1579 1583	1823 1831 1847 1861 1867 1871 1873 1877 1879 1889	2181 2137 2141 2143 2163 2161 2179 2203 2207 2213
31 37 41 43 47 53 59 61 67 71	233 239 241 251 267 263 260 271 277 281	467 479 487 491 499 503 509 521 523 541	789 743 751 767 761 769 773 787 797 809	1019 1021 1031 1033 1039 1049 1051 1061 1063	1297 1301 1303 1307 1319 1321 1327 1361 1367 1373	1597 1601 1607 1609 1613 1619 1621 1627 1637 1657	1901 1907 1913 1931 1933 1949 1951 1973 1979 1987	2221 2237 2239 2243 2251 2267 2269 2273 2281 2287
73 79 83 89 97 101 103 107 109 113	283 293 307 311 313 317 321 337 347 349	547 557 563 569 571 577 587 593 599 601	811 821 823 827 829 839 853 857 859 863	1037 1091 1093 1097 1103 1109 1117 1123 1129 1151	1351 1309 1409 1423 1427 1429 1433 1439 1447 1451	1668 1667 1669 1693 1697 1699 1709 1721 1723 1733	1993 1997 1999 2003 2011 2017 2027 2029 2039 2053	2293 2297 2309 2311 2333 2339 2341 2347 2351
127 131 137 139 149 151 157 163 167 173	353 357 367 373 379 383 389 389 401 409	607 613 617 619 631 641 643 647 653 659	877 881 883 887 907 911 919 929 937 941	1152 1163 1171 1181 1187 1193 1201 1213 1217 1223	1453 1459 1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511	1741 1747 1753 1759 1777 1783 1787 1789 1801 1811	2068 2069 2081 2083 2087 2089 2099 2111 2113 2129	2871 2377 2381 2383 2389 2393 2399 2411 2417 2423

_	كالكيفيات الجاوات		التقدر واخبرى جبوات		والمنسورة المتنسة			
2437	2823	8259	3659	4078	4507	4948	5898	5801
2441	2837	3271	3671	4079	4513	4951	5399	5807
2447	2843	3299	3673	4091	4517	4957	5407	5813
2459	2851	3301	3677	4093	4519	4967	5413	5821
2467	2857	3307	3691	4099	4523	4969	5417	5827
2473	2861	3313	3697	4111	4547	4973	5419	5839
2477	2879	3319	3701	4127	4549	4987	5431	5843
2503	2887	3323	3709	4129	4561	4993	5437	5849
2521	2897	3329	3719	4133	4567	4999	5441	5851
2531	2903	3331	3727	4139	4583	5003	5443	5857
2539	2909	3348	8783 8789 3761 8767 5769 8779 3793 8797 8803 8821	4153	4591	5009	5449	5861
2543	2917	3347		4167	4597	5011	5471	5867
2549	2927	3359		4169	4603	5021	5477	5869
2551	2939	3361		4177	4621	5023	6479	5879
2557	2953	3371		4201	4637	5039	5483	5881
2579	2957	3373		4211	4639	5051	5501	5897
2591	2963	3389		4217	4643	5059	5503	5903
2593	2969	3391		4219	4649	5077	5507	5923
2609	2971	3407		4229	4651	5081	5519	5927
2617	2999	3413		4231	4657	5087	5521	5939
2621 2633 2647 2657 2659 2663 2671 2677 2683 2687	8001 3011 3019 3023 3037 3041 3049 3061 3067 3079	3433 3449 3457 3461 3463 3467 3469 3491 3499 3511	3823 3833 3847 3851 3853 3863 3877 3881 3889 3907	4211 4243 4253 4259 4261 4271 4273 4283 4289 4297	4663 4673 4679 4691 4703 4721 4723 4729 4735 4751	5099 5101 5107 5113 5119 5147 5153 5167 5171 5179	5527 5531 5557 5563 5569 5573 5581 5591 5623 5639	5953 5981 5987
2689 2693 2699 2707 2711 2713 2719 2729 2731 2741	\$093 3089 3109 3119 3121 3137 3163 3167 3169 3181	3517 3527 3529 3533 3539 3541 3547 3557 3559 3571	3911 3917 3919 3923 3929 3931 3943 3947 3967 3967	4327 4337 4339 4349 4357 4363 4373 4391 4397 4409	4759 4783 4787 4789 4799 4801 4813 4817 4831	5189 5197 5209 5227 5231 5233 5237 5261 5273 5279	5641 5647 5651 5653 5657 5659 5669 5683 5689 5693	
2749	3187	3581	4001	4421	4861	5291	5701	
2753	3191	3583	4003	4423	4871	5297	5711	
2767	3203	3593	4007	4441	4877	5303	5717	
2777	3209	3607	4013	4447	4889	5309	5737	
2789	3217	3613	4019	4451	4903	5323	5741	
2791	3221	3617	4021	4457	4909	5333	5743	
2797	3229	3623	4027	4463	4919	5347	5749	
2801	3251	3631	4049	4481	4931	5351	5779	
2803	3253	3637	4051	4483	4933	5381	5783	
2819	3257	3643	4057	4493	4937	5387	5791	

оглавленіе,

	mp.
Предисловіе	Ш
отдълъ первый.	
Отвлеченныя цѣлыя числа.	
І. Счисленіе	1
II. Сложеніе	12
III. Вычитаніе	17
IV, Славянская и римская нумерація	22
V. Измънение суммы и остатка при измънении данныхъ чи-	
селъ	23
VI. Знаки дъйствій, скобки, формулы	26
VII. Умноженіе	28
VIII. Дъленіе	45
ІХ. Измъненіе произведенія и частнаго при измъненіи дан-	
ныхъ чиселъ	61
отдълъ второй.	
Именованныя цълыя числа.	
I. Понятіе объ измѣреніи величинъ	66
И. Преобразованіе именованнаго числа	78
III. Дъйствія надъ именованными числами.	80
IV. Задачи на вычисленіе времени	87
	•-
отдълъ третій.	
О дълимости чиселъ.	
I. Признаки дълимости	96
III. О дълителяхъ составного числа	109
IV. Общій наибольшій дълитель.	114
V. Наименьшее кратное число	

ОТДВЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

орыкновенныя дроои.	
II. Измѣненіе величины дроби съ измѣненіемъ ея членовь 15 III Сокращеніе дробей	23 28 30 32 35 38
VII. Именованныя дроби	56
отдълъ пятый.	_
Десятичныя дроби.	
(Десятичныя чиста).	
 II. Дъйствія надъ десятичными дробями. III. Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя 1 	61 67 73 82
отдълъ шестой.	
, Стлошеніе и пропорція.	
I. Отношение	87 90
отдълъ седьмой.	
Задачи на пропорціональныя величины.	
II. Сложное тройное правило. 2 III. Задачи на проценты у. 2 IV. Задачи на учетъ векселей. 2 V. Цфпное правило (правило перевода) 2 VI. Задачи на пропорціональное дфт. про 2	203 211 218 222 224 230
приложеніе.	
Приближенныя вычисленія	237 257
Оглавленіе	259